

第三章 非线性控制系统 Lyapunov 稳定性理论

在对控制系统进行分析设计过程中，稳定性起着主导作用。因为给定一个控制系统，在其各种性能中首先和最重要的问题就是控制系统的稳定性问题，因为不稳定的系统一般是不能用的，而且也是有潜在危险的。定性地说，如果控制系统从所需要的工作点附近启动后，意味着系统以后一直将运行停留在这一点周围，那么该控制系统称作稳定的。

本章主要讨论平衡点的稳定性，研究非线性控制系统平衡点的稳定性特征最有效的一般方法是由 19 世纪末俄国数学家 Lyapunov 引进的理论。其论文：“运动稳定性的一般问题”首次发表于 1892 年，它包括稳定性分析的两种方法：线性化方法与直接方法。线性化方法根据非线性系统在平衡点附近线性化系统的稳定性来判别自身的局部稳定性。直接方法不限于局部运动，它通过对系统构造一个“类似能量”的纯能量函数，然后考查该函数对时间的变化来判断稳定性。

Lyapunov 线性化方法成为线性控制设计的理论判据，而 Lyapunov 直接方法成为非线性控制系统分析和设计最重要的工具。线性化方法与直接方法统称为 Lyapunov 稳定性理论。本章主要讨论自治系统和非自治系统 Lyapunov 稳定性理论，同时也给出了系统不稳定条件。

3.1 非线性系统与平衡点

3.1.1 非线性系统

用以下的非线性微分方程描述一个非线性动力系统

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.1)$$

其中 f 是一个 $n \times 1$ 的非线性向量函数，而 x 是一个 $n \times 1$ 的状态向量。状态向量的一个特定值也称为一个点，因为它对应于状态空间的一个点。状态数 n 称为系统的阶。方程 (3.1) 的一个解 $x(t)$ 通常对应于状态空间的一条曲线（时间变量 t 从 0 到正无穷大），称这条轨线为状态轨线或者系统轨线。

注：虽然系统 (3.1) 并不明显包含控制变量，但它可以直接用于反馈控制系统。因为方程 (3.1) 可以代表一个反馈控制系统的闭环动态模型，因为控制输入本质上是状态与时间的一个函数，所以控制输入被吸收到闭环系统的动态方程中了。具体地说，如果控制系统的动态方程为：

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (3.2)$$

而设计的控制规律为：

$$u = g(x, t) \quad (3.3)$$

那么，闭环系统的动态方程为

$$\dot{x} = f(x, g(x, t), t) \quad (3.4)$$

显然方程 (3.1) 和方程 (3.4) 是同一类型。

非线性系统特殊情形是线性系统。当非线性系统的表达形式为

$$\dot{x} = A(t)x$$

时，此时非线性系统就称为线性系统。

3.1.2 自治系统与非自治系统

非线性系统 (3.1) 称为自治的，如果函数 f 不显含 t ，即如果系统方程可写作

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.5)$$

否则，该系统称为非自治的。

注：控制系统上述定义只能对闭环动态给出。因为控制系统包含控制器和装置（包含传感器及执行器动态），而控制系统的非自治可能来自模型或控制器。确切说，设有一个时不变的动力学模型为

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.6)$$

如果所选控制器是时变的，它可能导致一个非自治的闭环系统，即如果 $u = g(x, t)$ 。

例 3.1 简单模型 $\dot{x} = -x + u$ 可能变为非线性自治系统，但如取 $u = -x^2 \sin t$ ，则控制是非线性非自治的。事实上，线性时不变装置的自适应控制器往往使闭环系统变为非线性和非自治的。

自治系统与非自治系统的基本区别在于：自治系统的状态轨线不依赖于初始时刻，而非自治系统状态轨线一般要依赖于初始时刻。

3.1.3 平衡点

定常状态 x^* 称为一个系统的平衡态（或平衡点），如果一

且状态轨线 $x(t) = x^*$ ，则此后状态永远停留在 x^* 。数学上，这表明定常向量 x^* 满足 $0 = f(x^*)$ ，或者说导数（变化率）恒为零的点。

例 3.2 研究如下图 3.1 所示单摆运动

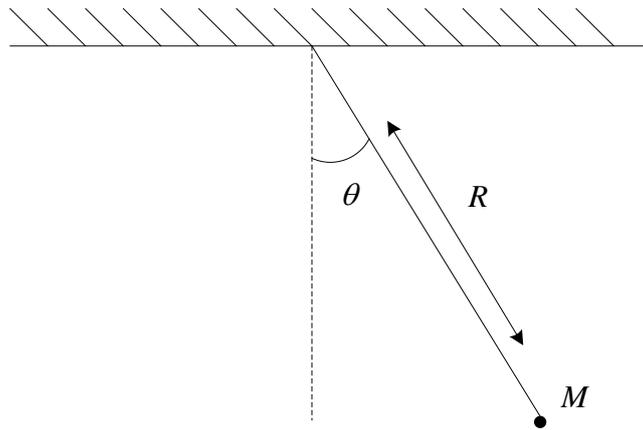


图 3.1 单摆运动

其动力系统方程为

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR \sin \theta = 0$$

记 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ 则相应的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{MR^2} x_2 - \frac{g}{R} \sin x_1$$

于是平衡点满足

$$x_2 = 0, \quad \sin x_1 = 0$$

因此，平衡点为 $(0[2\pi], 0)$ $(\pi[2\pi], 0)$ 等从物理意义上讲，它们分别对应摆的垂直向上及垂直向下的位置。

注：如果平衡点不在原点，可以通过平移方法把平衡点平移

到原点。

3.1.4 标称运动

在一些实际问题中，我们不是关心平衡点附近的稳定性，而是关心在某个运动状态附近

的稳定性，即当系

统的运动与它

的原始运动的轨

线有一个小偏离时，

它是否会保持与原

始轨线的接近。

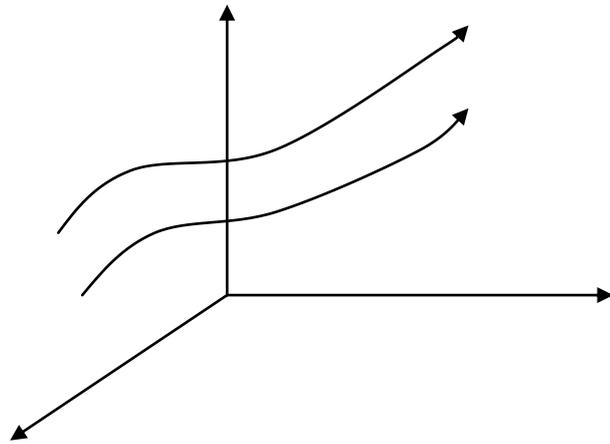


图 3.2 标称运动

可以证明，这种运动稳定性问题可以转化为关于某个平衡点稳定性问题。不过，这时的等价系统不是自治的。

证明 设 $x^*(t)$ 为方程 $\dot{x} = f(x)$ 的对应于初始值 $x^*(0) = x_0$ 的标称轨线。我们设初始值有一个扰动 $x(0) = x_0 + \delta x_0$ ，然后考查运动误差

$$e(t) = x(t) - x^*(t) \quad (3.7)$$

的相应变化，见上图，因为 $x^*(t)$ 和 $x(t)$ 均为方程 $\dot{x} = f(x)$ 的解，

故

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= f(x^*) & x(0) &= x_0 \\ \dot{x} &= f(x) & x(0) &= x_0 + \delta x_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

那么 $e(t)$ 满足以下的非自治系统

$$\dot{e} = f(x^* + e, t) - f(x^*, t) = g(e, t) \quad (3.9)$$

初始值为 $e(0) = \delta x_0$ 由于 $g(0, t) = 0$ ，以 e 为状态，以 g 代替 f 的新

的动态系统以状态空间原点为其一个平衡点，而非自治系统。可以说一个自治系统对每一个特殊的标称运动的稳定性对应于一个等价的非自治系统关于平衡点的稳定性。

例 3.3 自治质量-弹簧系统的动态方程为

$$m\ddot{x} + k_1x + k_2x^3 = 0$$

包含反应弹簧硬效应的非线性特性。讨论初始值为 x_0 的轨线 $x^*(t)$ 的运动稳定性。

设初始值扰动后为 $x(0) = x_0 + \delta x_0$ ，相应的系统轨线记作 $x(t)$ 。可以得到误差 e 的等价方程为

$$m\ddot{e} + k_1e + k_2[e^3 + 3e^2x^*(t) + 3ex^{*2}(t)] = 0$$

却不是一个自治系统。

3.2 稳定的数学描述

记号 B_R 表示为状态空间的球形区域 $\|x\| < R$ ， S_R 为球面 $\|x\| = R$ 。

3.2.1 稳定性与不稳定性

定义 3.2.1 一个平衡点 $x=0$ 称为稳定的，如果任给 $R > 0$ ，总存在 $r > 0$ ，使当初始值 $\|x(0)\| < r$ 时，过初始值的解总有 $\|x(t)\| < R$ ， $\forall t$ 。否则称为不稳定的平衡点。

稳定的几何解析是：当初始值的模相对小时，即在区域 $\|x\| < r$ ， S_r 内，则过初始值的解的模不会超出预先给定的区域 $\|x\| < R$ ， S_R 。

注：“不稳定”与“逃逸”的本质区别在于逃逸指轨线从平衡点附近不断走远，直到无穷远。而不稳定只是离开平衡点，不一定趋于无穷。所以，对于非线性系统逃逸是不稳定的特殊情况。但

对于线性系统而言，不稳定与逃逸是等价的。考察下面例子

例 3.4 有极限环的例子，考虑范德波尔（van der Pol）振子方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2\end{aligned}$$

按等斜率法其轨线图如图 3.3 所示

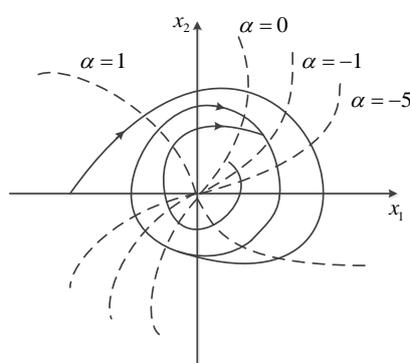


图 3.3 等斜率法轨线图

即系统自任意一个非零初始点出发的轨线都趋于一个极限环。这说明，如果定义 3.2.1 中的 $R > 0$ 选得足够小，使得以为半径的圆整个包含在极限环的闭曲线内，那么，不管初始值多么接近原点，系统轨线都将离开这个圆，但不能与极限环相交跑出极限环至无穷远。这说明原点是不稳定的但不是逃逸。

3.2.2. 渐近稳定性和指数稳定性

定义 3.2.2 平衡点 $\mathbf{0}$ 为渐近稳定的，如果它是稳定的，而且存在 $r > 0$ 使当 $\|x(0)\| < r$ 时， $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$, $x \rightarrow \infty$ 。

定义 3.2.3 平衡点 $\mathbf{0}$ 是指数稳定的，如果存在两个正数 α 和 λ 使得 $\forall t > 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$ 在原点附近的某个球内成立。

例 3.5 $\dot{x} = -(1 + \sin x)x$.

其解为

$$x(t) = x(0) \exp\left(-\int_0^t [1 + \sin(x(\tau))] d\tau\right)$$

因此

$$|x(t)| \leq |x(0)| e^{-t}$$

指数稳定蕴含渐近稳定，反之不成立。

如 $\dot{x} = -x^2$, $x(0) = 1$

因它的解为 $x = 1/(1+t)$ 。这个函数比任何指数函数 $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$) 都收敛得慢。

3.2.3 局部稳定性与全局稳定性

定义 3.2.4 如果对任何初值渐近（或者指数）稳定成立，则这样的平衡点称为大范围渐近（指数）稳定，或者全局渐近（指数）稳定。

3.3 线性化与局部稳定性

对于自治系统 $\dot{x} = f(x)$ ，假设 $f(x)$ 是连续可微的，由泰勒展式，在原点可以展开成如下实在

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} x + f_h(x) \quad (3.10)$$

其中， $f_h(x)$ 表示 x 的高阶项，记 $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}$ 。

那么系统

$$\dot{x} = Ax \quad (3.11)$$

称为原非线性系统在平衡点的线性化系统

非线性系统与线性化系统在平衡点的稳定关系如下：

定理 3.3.1 (Lyapunov 线性化方法)

- 如果线性化系统是严格稳定的（即 A 的特征值在复平面的左半开平面内），那么非线性系统的平衡点是渐近稳定的。
- 如果线性化系统是不稳定的（即 A 的特征值至少有一个在复平面的右半开平面内），那么非线性系统的平衡点是不稳定的。
- 如果线性化系统是临界稳定的（即 A 的特征值在复平面的左半开平面内，且至少有一个在虚轴上），那么由线性化系统得不到原系统的任何信息。

例 3.6 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^2 + x_1 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + (x_1 + 1)x_1 + x_1 \sin x_2\end{aligned}$$

在平衡点的线性化系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

特征根具有正实部，所以平衡点不稳定。

3.4 Lyapunov 直接方法

Lyapunov 直接方法的基本原理是一个基本物理现象的数学表达：如果一个力学（或电）系统的全部能量连续耗散，那么系统（不管是线性的还是非线性的）都将最终停止在一个平衡点处。这样，我们可以由一个标量函数的变化来判断一个系统的稳定性。

具体让我们考查右图 3.4 中的质量-阻力-弹簧系统，其动力学方程为

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0$$

这里 $b\dot{x}|\dot{x}|$ 表示非线性耗散式阻尼，而 $(k_0x + k_1x^3)$ 代表非线性弹簧。

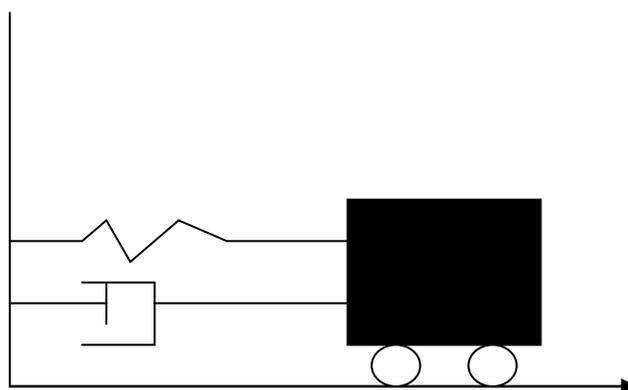


图 3.4 质量-阻力-弹簧系统

假定质点由弹簧的自然长度拉开一大段距离，然后松手，那么质点运动是否稳定？用稳定性定义很难判断。因为这个非线性方程的一般解很难得到。而线性化方法也不能用，因为运动可能从线性区域外开始。但考查系统能量能得到运动形态的许多性质。系统的全部机械能是它的动能与势能之和

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 \quad (3.12)$$

比较稳定性定义与机械能，不难看出：

- 能量为 0 对应于平衡点 ($x = 0, \dot{x} = 0$)
- 渐近稳定意味着机械能收敛到 0
- 不稳定对应于机械能的增长

因为系统的能量变化率可以对上式进行求导，并利用系统方程可以得到：

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3 \quad (3.13)$$

上式表明由于阻尼的存在导致系统的能量不断减少，直至停止运动。

3.4.1 正定函数与 Lyapunov 函数

定义 3.4.1 一个标量函数 $V(x)$ 称为局部正定的，如果 $V(0) = 0$ ，且在一个球 B_{R_0} 内有 $\forall x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$ 。一个标量函数 $V(x)$ 称为全局正定的，如果 $V(0) = 0$ ，且在整个空间内有 $x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$

定义 3.4.2 如果一个球 B_{R_0} 内，函数 $V(x)$ 是正定的，且有连续偏导数，而且它沿系统的任意状态轨线的导数是负半定的，即 $\dot{V}(x) \leq 0$ ，那么称 $V(x)$ 为系统的 Lyapunov 函数。

3.4.2 平衡点定理

3.4.2.1. 局部稳定性的 Lyapunov 定理

定理 3.4.1 (局部稳定性) 如果在一个球 B_{R_0} 内，存在一个标量函数 $V(x)$ ，它具有连续偏导数，并且

- $V(x)$ 正定 (在球 B_{R_0} 内)
- $\dot{V}(x) \leq 0$ (在球 B_{R_0} 内)

那么平衡点 0 是稳定的，如果导数 $\dot{V}(x)$ 在球 B_{R_0} 内是负定的，那么 0 是渐近稳定的。

证明：稳定性。设 $\|x\| \leq H \leq A$

任给正数 $\varepsilon < H$ ，由 $V(x)$ 的连续性和正定性知，必定存在

$$l = \inf V(x) > 0, \text{ 对 } \varepsilon \leq \|x\| \leq H$$

又由 $V(0) = 0$ 和 $V(x)$ 连续推知存在充分小的 $\delta < \varepsilon$ ，使得 $\|x\| \leq \delta$ 时有 $V(x) < l$

下面证明，对这样的 δ ，只要 $\|x_0\| \leq \delta$ ，则以 x_0 为初始向量的解 $x(t)$ 对一切 $t \geq t_0$ 满足不等式

$$\|x\| < \varepsilon$$

由解对 t 的连续性, 上面的不等式至少对某个区间 $t_0 \leq t < T$ 成立。因为 $\varepsilon < H$, 由定理条件

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0$$

积分得到

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_{t_0}^t \frac{dV(x(t))}{dt} dt \leq 0 \quad (3.14)$$

因此当 $t_0 \leq t < T$ 时有

$$V(x(t)) \leq V(x_0) < l$$

这证明了在解满足不等式 $\|x\| < \varepsilon$ 的任意区间内, $V(x(t)) \leq V(x_0) < l$ 均成立。

如果 $V(x(t)) \leq V(x_0) < l$ 不是对一切 $t_0 \leq t$ 成立, 则当 t 从 t_0 增大时必存在某个值 t^* , 使得 $t_0 \leq t < t^*$ 时不等式 $\|x\| < \varepsilon$ 成立, 但是在 $t = t^*$ 有 $\|x(t^*)\| = \varepsilon$, 由于 $\varepsilon < H$, 故不等式 $V(x(t)) \leq V(x_0) < l$ 在 $t = t^*$ 时仍成立, 即 $V(x(t^*)) < l$, 但由 l 的定义, 显然

$$\|x(t^*)\| < \varepsilon$$

这与假设 $\|x(t^*)\| = \varepsilon$ 矛盾

渐近稳定性 由以上证明, 当 $\frac{dV}{dt}$ 定负时, 显然零解是稳定的。现在就取稳定性证明中的 δ 作为 δ_0 , 因而当 $\|x_0\| \leq \delta_0$ 时, 对一切 $t \geq t_0$ 时有 $\|x(t)\| < H$ 。为了证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, 先证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$$

由于 $\frac{dV}{dt}$ 为负, $V(x(t))$ 对 t 是递减的, 可设

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = c$$

如果 $c \neq 0$, 则对于任何 $t \geq t_0$, 有

$$V(x(t)) > c$$

又由 $V(x)$ 的连续、正定, $V(0) = 0$, 故存在 $\lambda > 0$ 使得对于任何 $t \geq t_0$ 有 $\|x(t)\| > \lambda$

如果取

$$m = \sup_{\lambda \leq \|x\| \leq H} \frac{dV(x)}{dt}$$

由 $\frac{dV}{dt}$ 为负定, 故 $m < 0$, 于是

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_{t_0}^t \frac{dV(x(t))}{dt} dt \leq m(t - t_0)$$

当 t 增大时, $V(x)$ 变为负的。矛盾。所以 $c = 0$

进而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ 。否则存在 $\{t_k\} (k=1, 2, \dots), k \rightarrow \infty$ 时, $t_k \rightarrow \infty$

使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t_k)) = V(x^*) \neq 0$

从而证明了解的渐近稳定性。

例 3.7 考察系统 $\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0$ 的稳定性。

取标量函数 $V = (1 - \cos \theta) + \frac{\dot{\theta}^2}{2}$ 可验证:

$\dot{V}(x) = \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2 \leq 0$, 从而系统的平衡点是稳定的。

例 3.8 考察系统

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

平衡点的稳定性。

取正定函数

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

验证其沿轨线的导数为

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

这说明上式在区域内 $x_1^2 + x_2^2 - 2 < 0$ 局部负定。从而保证了原点是渐近稳定的。

3.4.2.2. 全局稳定性的 Lyapunov 定理

上述定理可用于局部稳定性分析。要保证全局稳定性，我们自然希望将上述局部定理中的 B_{R_0} 放大到整个状态空间，这的确是必要的，但不充分。要给 V 函数一个附加条件： $V(x)$ 必须是径向无界的，这指的是，当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时（换言之，当 x 沿任何方向趋于无穷时） $V(x) \rightarrow \infty$ 。有以下重要结果：

定理 3.4.2（全局稳定性） 假定存在状态 x 的标量函数 $V(x)$ ，它具有一阶连续偏导数并且

- $V(x)$ 正定
- $\dot{V}(x)$ 负定
- 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时， $V(x) \rightarrow \infty$

那么原点作为平衡点是全局渐近稳定的。

注：径向无界的条件是用来保证等值曲线（在高维情况下为等值曲面） $V(x) = V_a$ 对应于一条闭曲线。如果曲线不闭，则轨线虽然从高等值线往低等值线走，但却可能漂离平衡点。例如，对

正定函数 $V(x) = \left[\frac{x_1^2}{1+x_1^2} \right] + x_2^2$ ，曲线 $V(x) = V_a$ 当 $V_a > 1$ 时是一条开曲线，如图 3.5 所示。

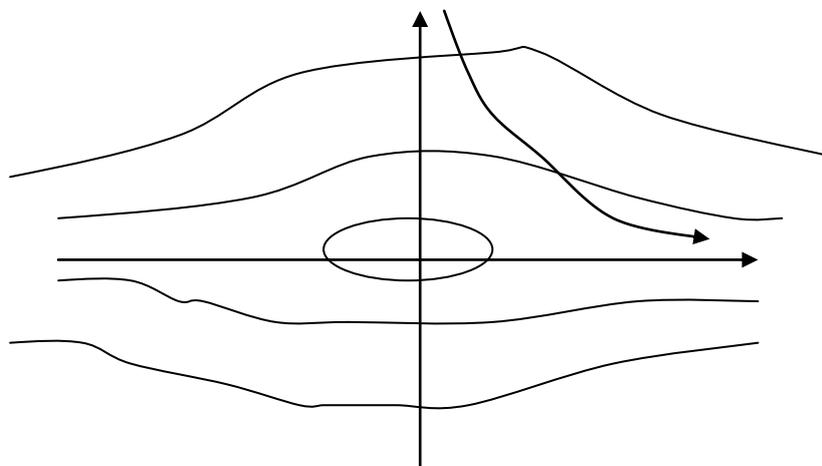


图 3.5 等值曲线

例 3.9 考察系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

的全局渐近线

状态空间原点是系统的一个平衡点。取正定函数

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ，则函数沿系统的导数为：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

是全局负定的，因此平衡点是全局渐近稳定。

例 3.10 考察系统平衡点

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{6x_1}{z^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2(x_1 + x_2)}{z^2}\end{aligned}$$

稳定状态。

设 $z = 1 + x_1^2$ ，在抛物线 $x_2^h = 2/(x_1 - \sqrt{2})$ 上系统轨线斜率为

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-1}{1 + 2^{3/2}x_1 + 2x_1^2}$$

而抛物线的斜率为

$$\frac{dx_2^h}{dx_1} = \frac{-1}{1 - 2^{1/2}x_1 + x_1^2/2}$$

注意，当 $x_1 > \sqrt{2}$ 时，第一式大于第二式，这说明轨线与抛物线第一象限的那一段在向着轴的方向不相交（因为在抛物线上当 $x_1 > \sqrt{2}$ 时， $\dot{x}_1 > 0$ ），这样一部分轨线就不会趋于原点，这说明系统不是全局渐近稳定的。

但是利用标量函数

$$V(x) = \frac{x_1^2}{z} + x_2^2$$

却有 $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ ，因 $V(x) = \frac{x_1^2}{z} + x_2^2$ 不满足径向无界的条件，见

图 3.6，从而不能确定系统的全局渐近稳定性！

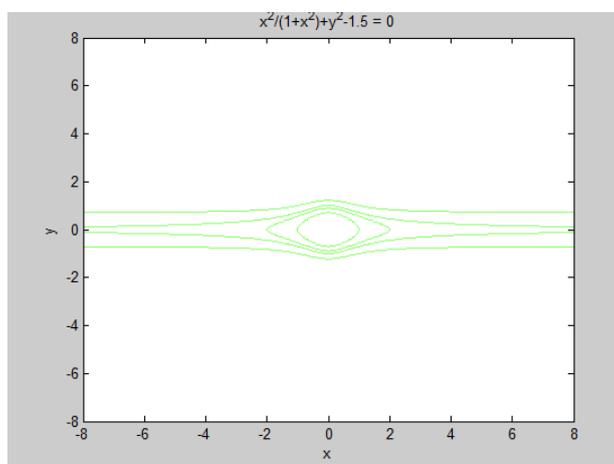


图 3.7 $V(x) = \frac{x_1^2}{z} + x_2^2$ 不满足径向无界的条件

3.4.3 不变集理论

控制系统的渐近稳定性是一个非常重要的性能指标,但是之前的平衡点定理常常难以保证这个性质。因为所选的 Lyapunov 函数的沿系统的导数常常是负半定的。在负半定的情况下如何确定渐近性? 利用拉瑟 (Lasser) 的不变集理论可解决部分渐近稳定性问题。

定义 3.4.3 一个集合 G 称为一个动态系统的不变集。如果从 G 中一点出发的轨线永远留在 G 中。

例如任一个平衡点是一个不变集,一个平衡点的吸引域也是一个不变集,一个平凡不变集是整个状态空间。对于一个自治系统,状态空间的任何一条轨线都是一个不变集。极限环是一种特殊的系统轨线,极限环也是不变集。

1. 局部不变集定理

局部不变集定理反映这样一种直觉: Lyapunov 函数 V 必须会逐渐消失 (即 \dot{V} 会收敛于 0)。

定理 3.4.3 (局部不变集定理) 考查一个自治系统 $\dot{x} = f(x)$, 这里 f 是连续的。设 $V(x)$ 为一个有连续一阶偏导数的标量函数, 并且满足:

- 对于任何 $l > 0$, 由 $V(x) < l$ 定义的 Ω_l 为一个有界区域
- 对任 $x \in \Omega_l$, $\dot{V}(x) \leq 0$

设 R 为 Ω_l 内 $\dot{V}(x) = 0$ 的所有点的集合, M 为 R 中的最大不变集,

那么当 $t \rightarrow \infty$ 时从 Ω_l 内出发的轨线均趋于 M 。

不变集定理不仅使我们在 \dot{V} 负半定的情况下得到渐近稳定的结论，同时，也可以将用 Lyapunov 函数描述性态收敛的方法从平衡点推广到更一般的情况，例如收敛到极限环。

例 3.11 对引例的质量-阻尼-弹簧系统

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0 \text{ 进行渐进性分析}$$

解 取 Lyapunov 函数：

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4$$

对其求导数得到

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3 \leq 0$$

令 $\dot{V}(x) = -b|\dot{x}|^3 = 0$ 可得到解： $\dot{x} = 0, x = 0$ 只有原点为不变集，故平衡点是渐进稳定的。

例 3.12 吸引域例子，对系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

设 $l=2$ ，则由 $V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 2$ 定义的集合 Ω_2 是一个有界集。

只含一个原点，它是不变集（因为它是一个平衡点）。局部不变集定理的一切条件满足，因此由圆内任意一点出发的轨线均收敛于原点。吸引域由不变集理论唯一确定。

例 3.13 吸引极限环例子。考察系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^7[x_1^4 + 2x_2^2 - 10] \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - 3x_2^5[x_1^4 + 2x_2^2 - 10]\end{aligned}$$

首先取 Lyapunov 函数:

$$V(x) = (x_1^4 + 2x_2^2 - 10)^2$$

对其求导数得到

$$\dot{V}(x) = -8(x_1^{10} + 3x_2^6)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)^2$$

上式除在下面区域外为严格负

$$x_1^{10} + 3x_2^6 = 0, \quad x_1^4 + 2x_2^2 - 10 = 0$$

不变集为原点和一个极限环 $x_1^4 + 2x_2^2 - 10 = 0$

推论 考查一个自治系统 $\dot{x} = f(x)$, 这里 f 是连续的。设 $V(x)$ 为一个有连续一阶偏导数的标量函数, 设在原点的某个邻域 Ω 内有:

- $V(x)$ 局部正定
- \dot{V} 负半定
- 由 $\dot{V} = 0$ 确定的集合 R 除 $x \equiv 0$ 外不含自治系统的其它轨线。

那么 0 是渐近稳定平衡点, 而且在 Ω_l 中的由 $V(x) < l$ 定义的最大连通域 Ω_l 是平衡点的吸引域。

2. 全局不变集定理

定理 3.4.4 (全局不变集定理) 考查一个自治系统 $\dot{x} = f(x)$, 这里 f 是连续的。设 $V(x)$ 为一个有连续一阶偏导数的标量函数, 并且

- $V(x) \rightarrow \infty$ (当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时)

- $\dot{V}(x) \leq 0$ 对所有的 x 成立

设 R 为 $\dot{V}(x) = 0$ 的所有点的集合, M 为 R 中的最大不变集, 那么当 $t \rightarrow \infty$ 时所有解轨线均全局渐近收敛于 M

例 3.14 考察一个二阶系统

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0$$

其中, $b(x), c(x)$ 为连续函数, 满足以下条件

$$\dot{x}b(\dot{x}) > 0, \dot{x} \neq 0$$

$$xc(x) > 0, x \neq 0$$

取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)dy$$

看作系统的动能与势能之和。

对其求导得到

$$\dot{V} = \dot{x}\ddot{x} + c(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) \leq 0$$

并且由 $\dot{V} = -\dot{x}b(\dot{x}) = 0$ 得到 $\dot{x} = 0$ 进一步可以得到 $\ddot{x} = -c(x)$ 当 $x \neq 0$ 是非零的。因此系统不可能停在 $x = 0$ 外的点。满足全局不变集定理条件。

注: 与 Lyapunov 直接法相比, 不变集方法不要求 v 的正定性。这使我们有可能利用单个“类 Lyapunov 函数”去处理带有多个平衡点的系统稳定性问题。

例 3.15 多模态 Lyapunov 函数

$$\ddot{x} + |x^2 - 1|\dot{x}^3 + x = \sin \frac{\pi x}{2}$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x (y - \sin \frac{\pi y}{2}) dy$$

这个函数有两个最小点, 分别为 $x = \pm 1, \dot{x} = 0$, 以及一个关于 x 的最大点, 在 $x = 0, \dot{x} = 0$, V 的时间导数为

$$\dot{V} = -|x^2 - 1| \dot{x}^4$$

它是系统的能量耗散, 现在

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 \text{ 或 } x = \pm 1$$

考虑以下情况

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \sin \frac{\pi x}{2} - x \neq 0 \quad \text{除非 } x = 0 \text{ 或 } x = \pm 1$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

因此, 由不变集定理可知系统全局收敛于 $(x = 1, \dot{x} = 0)$ 或者 $(x = -1, \dot{x} = 0)$ 或 $(x = 0, \dot{x} = 0)$ 。前两个平衡点是稳定的, 因为它们对应于 V 的局部最小值 (注意, 这里线性化仍给不出任何稳定性)。相反, 平衡点 $(x = 0, \dot{x} = 0)$ 是不稳定的。它可由线性化 $[\ddot{x} \approx (\pi/2 - 1)x]$ 看出。也可以简单地由以下讨论得出: 由于此点是 V 沿的局部最大点。在 x 轴方向上从零点有个小位移的点出发, 轨线必然会离开零点。

3.5 时变系统稳定性理论

在前面的内容分析中, 我们重点研究了自治系统的 Lyapunov 稳定性分析方法。但是, 在许多的实际问题中, 我们遇到的通常是非自治系统。如火箭起飞就是一个非自治系统, 因为包含在它的动态方程中的参数 (如空气的温度和压力) 都随着

时间的变化而变化。而且，正如前面所讨论的，确定一个自治系统对标称运动的稳定性要求对与这个自治系统等价的非自治系统围绕其平衡点进行稳定性分析。因此，需要进一步研究非自治系统的稳定性分析的方法。本节主要研究时变非线性系统的稳定性分析的方法。

3.5.1 时变系统的稳定性概念

时变系统的稳定性非常类似自治系统的稳定性概念。但是，由于时变系统性态对初始时间 t_0 的依赖性，这些稳定性概念的定义中显含 t_0 ；进而，鉴于时变系统性态对不同的初始时间 t_0 有不同值，系统性态有一定的相容性，必须有一个新的概念----“一致性”来表征。本节中，我们把自治系统的稳定性概念简洁地推广到时变系统，并且介绍“一致性”这个新概念。

对于一个形如

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.15)$$

的时变系统， x^* 称为它的一个平衡点，如果下式成立：

$$f(x^*, t) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.16)$$

注意到对 $\forall t \geq t_0$ 此方程都成立，这意味着系统 (3.15) 在所有的时间内都能够停留在点 x^*

例 3.16 系统

$$\dot{x} = -\frac{a(t)x}{1+x^2}$$

有一个平衡点 $x=0$ ；然而对于 $b(t) \neq 0$ 的系统

$$\dot{x} = -\frac{a(t)x}{1+x^2} + b(t)$$

就没有，可以认为它是一个有外部输入或扰动 $b(t) \neq 0$ 的系统。

稳定性概念的扩展：

1. 平衡点 $\mathbf{0}$ 在 t_0 处是稳定的，如果对于任意的 $R > 0$ ，存在一个正数 $r(R, t_0)$ ，使得

$$\|x(t_0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.17)$$

否则，平衡点 $\mathbf{0}$ 是不稳定的。

2. 平衡点 $\mathbf{0}$ 在 t_0 处是渐进稳定的，如果它是稳定的，并且 $\exists r(t_0) > 0$ ，使得

$$\|x(t_0)\| < r(t_0) \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

3. 平衡点 $\mathbf{0}$ 是指数稳定的，如果存在两个正数 α 和 λ ，使得对充分小的 $x(t_0)$ ，有

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x_0\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.19)$$

4. 平衡点 $\mathbf{0}$ 在 t_0 处是全局渐进稳定的，如果对任何 $\forall x(t_0)$ 有

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

例 3.17 一阶时变线性系统

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t)$$

它的解为

$$x(t) = x(t_0) \exp \left[-\int_{t_0}^t a(r) dr \right]$$

因此，当 $a(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$ ，系统是稳定的；当 $\int_0^\infty a(r) dr = +\infty$ ，系统

是渐进稳定的；如果存在一个正数 T ，使得对 $\forall t \geq 0$ ，有

$\int_t^{t+T} a(r)dr \geq \gamma$ （其中 γ 是一个正常数），那么系统是指数稳定的。

例 3.18 下面系统的稳定情况

$\dot{x} = -\frac{x}{(1+t)^2}$ 是稳定的（但不是渐进稳定的）；

$\dot{x} = -\frac{x}{(1+t)}$ 是渐进稳定的；

$\dot{x} = -tx$ 是指数稳定的。

例 3.19 考察一个有趣的例子

$$\dot{x} = -\frac{x}{1 + \sin x^2}$$

它的解可以表示为

$$x(t) = x(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t \frac{-1}{1 + \sin x^2(r)} dr \right]$$

由于

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{1 + \sin x^2(r)} dr \geq \frac{t - t_0}{2}$$

系统是以速率 1/2 指数收敛的。

稳定性概念中的一致性

前面介绍的时变系统的 Lyapunov 稳定性和渐近稳定性的概念表明，初始时间对系统性态有重要影响。实际上，不管初始时间如何，我们通常都期望系统性态有一定的“一致性”，这就促

使我们考虑一致稳定性和一致渐近稳定性的定义。以后我们会看到，具有一致性性质的时变系统具有某种期望的抗干扰能力。需要指出的是，因为自治系统状态与初始时间无关，所以它的稳定性性质都是一致的。

定义 3.5.1 平衡点 $\mathbf{0}$ 是局部一致稳定的，如果表达式 (3.17) 中的标量 r 可以选择为与 t_0 无关，即 $r = r(R)$ 。

定义 3.5.2 平衡点 $\mathbf{0}$ 是局部一致渐近稳定的，如果它是一致稳定的，且存在一个半径与 t_0 无关的吸引球 B_{R_0} ，使得初始状态在 B_{R_0} 内的轨线关于 t_0 一致收敛于 $\mathbf{0}$ 。

轨线稳定、渐近稳定及不稳定的走向可由下图 3.7 所示：

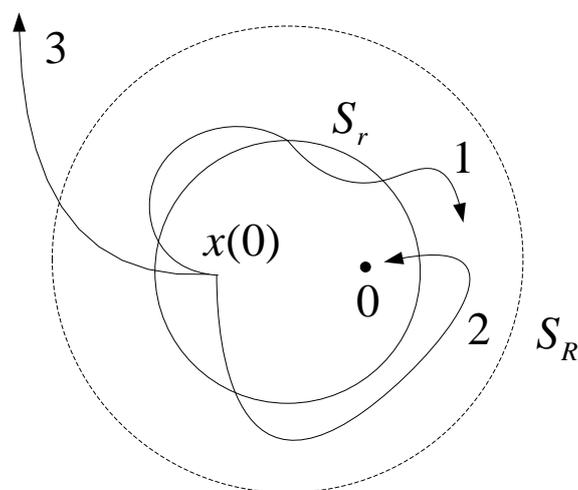


图 3.7 曲线 1 稳定，曲线 2 渐近稳定，曲线 3 不稳定

注：对关于 t_0 一致收敛于 $\mathbf{0}$ 是指对于

$$\forall R_1, R_2 : 0 < R_2 < R_1 \leq R_0, \exists T(R_1, R_2) > 0, \text{使得对 } \forall t_0 \geq 0 \text{ 有}$$

$$\|x(t_0)\| < R_1 \Rightarrow \|x(t)\| < R_2 \quad \forall t \geq t_0 + T(R_1, R_2)$$

即从球 B_{R_1} 内出发的状态轨线经过与时间 t_0 无关的时间段 T 之后，

一致收敛到一个更小的球 B_{R_2}

例 3.20 考虑一阶系统

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$$

它有通解

$$x = \frac{1+t_0}{1+t} x(t_0)$$

这个解渐近收敛于零，但不一致收敛。直观上是因为对于更大的 t_0 此解要经过更长的时间才能接近于原点。

例 3.21 一阶线性系统

$$\dot{x} = (6tsint - 2t)x$$

其解为 $x(t) = x(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t (6tsint - 2t) dt \right]$

$$= x(t_0) \exp [6sint - 6tcost - t^2 - 6sint_0 + 6t_0cost_0 + t_0^2]$$

(读者可以绘出上两例子的关于解对 t_0 的依赖性的轨迹图，帮助理解!)

3.6 时变系统的 Lyapunov 稳定性分析

前面已经对时不变系统的稳定性定理作了详细的论述，很多思想都可以类似地应用到时变系统的情况，但是在处理时变系统稳定性过程中，相关条件的要求变得更复杂、更受限制。因为时变系统的稳定性与初始值无关，为了能得到时变系统的稳定性定理，通过引入时变正定函数、K 类函数等，把时变系统的稳定性定理与时不变系统稳定性定理有机联系，成功解决了时变系统的一致性问题！时变系统的 Lyapunov 直接方法的基本思想就是利

用标量 Lyapunov 函数来判断非线性系统的稳定性，可以类似地用于时变系统中。除了在数学上更复杂之外，主要不同之处是在时变系统中不能应用强有力的 Lasser 定理。

3.6.1 时变正定函数和具有无穷大上界的函数

利用 Lyapunov 直接方法研究时变系统时，要用到显含时间的标量函数 $V(x,t)$ ，而在时不变系统分析中，运用时不变标量函数 $V(x)$ 就够了。现在，我们对这样的标量函数 $V(x,t)$ 作以说明。

定义 3.6.1 标量时变函数 $V(x,t)$ 是局部正定的，如果满足 $V(0,0) = 0$ ，且存在一个时不变正定函数 $V_0(x)$ ，使得

$$\forall t \geq t_0, V(x,t) \geq V_0(x) \quad (3.20)$$

由此可见一个时变函数是局部正定的，则它能控制住一个时不变局部正定函数。全局正定函数可以类似定义。

用同样方法可以定义其它局部或全局的相关概念。

在时变系统的 Lyapunov 分析中，具有无穷大上界函数也是必要条件。

定义 3.6.2 标量时变函数 $V(x,t)$ 具有无穷大上界，如果 $V(0,0) = 0$ ，且存在一个时不变正定函数 $V_1(x)$ ，使得

$$\forall t \geq 0, V(x,t) \leq V_1(x) \quad (3.21)$$

换句话说，标量函数 $V(x,t)$ 如果受一个时不变正定函数的控制，则具有无穷大上界。

例 3.22 时变正定函数

$$V(x,t) = (1 + \sin^2 t)(x_1^2 + x_2^2)$$

因为它控制住时不变正定函数 $V_0(x) = x_1^2 + x_2^2$ 。这个函数也具有无穷大上界，因为它被函数 $V_1(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$ 控制住。

给定一个时变标量函数 $V(x,t)$ ，它沿着系统 $\dot{x} = f(x,t)$ 的轨线的导数为

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,t) \quad (3.22)$$

3.6.2 时变系统稳定的 Lyapunov 定理

定理 3.6.1（时变系统稳定的 Lyapunov 定理）对于时变系统

$$\dot{x} = f(x,t)$$

稳定性：如果在平衡点 0 的领域球 B_{R_0} 内，存在一个具有连续偏导数的标量函数 $V(x,t)$ ，使得

- 1) $V(x,t)$ 是正定的；
- 2) $\dot{V}(x,t)$ 是半负定的，

那么平衡点 0 是 Lyapunov 意义下稳定的。

一致稳定和一致渐近稳定：而且，如果

- 3) $V(x,t)$ 具有无穷大上界，

那么原点是一致稳定的；如果条件 2) 加强为 $\dot{V}(x,t)$ 是负定的，那么平衡点是一致渐近稳定的。

全局一致渐近稳定：如果球 B_{R_0} 用全空间代替，且满足条件 1)、2)、条件 3) 和条件

- 4) $V(x,t)$ 是径向无界的，

那么平衡点 $\mathbf{0}$ 是全局一致渐近稳定的。

为便于对定理 3.6.1 的证明，我们先介绍比较函数及其性质，并且给出一致稳定性与比较函数的关系。

定义 3.6.3 称连续函数 $\alpha: R^+ \rightarrow R^+$ 是 K 类函数 (或者属于 K 类函数)，如果

- $\alpha(0) = 0$;
- $\alpha(p) > 0, \forall p > 0$;
- α 是不减的

如果当 $p \rightarrow \infty$ 时 $\alpha(p) \rightarrow \infty$ ，则 α 属于 K_∞ 类函数

定义 3.6.4 对于连续函数 $\beta: [0, a) \times R^+ \rightarrow R^+$ ，如果对于每个固定的 s ，映射 $\beta(r, s)$ 都是关于 r 的 K 类函数，并且对于每个固定的 r ，映射 $\beta(r, s)$ 都是关于 s 的递减函数，且当 $s \rightarrow \infty$ 时， $\beta(r, s) \rightarrow 0$ ，则 $\beta(r, s)$ 是 KL 类函数。

例 3.23 下面函数对应不同的比较函数

1. 函数 $\alpha(r) = \tan^{-1}(r)$ 是严格递增的，因为 $\alpha'(r) = \frac{1}{(1+r^2)} > 0$ ，因此 $\alpha(r) = \tan^{-1}(r)$ 属于 K 类函数，但它不属于 K_∞ 类函数，因为 $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2} < \infty$ 。
2. 函数 $\alpha(r) = r^c$ 对于任意正实数 c 函数是严格递增的，因为 $\alpha'(r) = cr^{c-1} > 0$ ，且 $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ ，因此属于 K_∞ 类函数。
3. 函数 $\alpha(r) = \min\{r, r^2\}$ 连续且是严格递增的，又有 $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ ，因此属于 K_∞ 类函数。注意，在 $r=1$ 处 $\alpha(r)$ 不

是连续可微的。 K 类函数不要求连续可微性。

4. 函数 $\beta(r, s) = \frac{r}{(ksr+1)}$ 对于任意正实数 k ，对 r 函数是严格递

增的，因为 $\frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{1}{(1+ksr)^2} > 0$ ，但对 s 是严格递减的，因为

$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{-kr^2}{(1+ksr)^2} < 0$ ，而且当 $s \rightarrow \infty$ 时， $\beta(r, s) = \frac{r}{(ksr+1)} \rightarrow 0$ ，

因此 $\beta(r, s)$ 是 KL 类函数。

5. 函数 $\beta(r, s) = r^c e^{-s}$ 对于任意正实数 c 都是 KL 类函数。

下面的引理揭示了正定函数，具有无穷大函数与 K 类函数之间的关系。

引理 3.6.1 函数 $V(x, t)$ 是局部（或全局）正定的，当且仅当存在一个 K 类函数 α ，使得对 $\forall t \geq 0, \forall x \in B_{R_0}$ ，（或全状态空间），有

$$V(0, t) = 0 \text{ 和 } V(x, t) \geq \alpha(\|x\|)$$

函数 $V(x, t)$ 是局部（或全局）无穷大上界的，当且仅当存在一个 K 类函数 β ，使得对 $\forall t \geq 0, \forall x \in B_{R_0}$ ，（或全状态空间），有 $V(0, t) = 0$ 和 $V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$

证明 充分性显然

必要性 假定存在一个时不变正定函数 $V_0(x)$ ，使得

$V(x, t) \geq V_0(x)$ ，并且要证存在一个 K 类函数 α ，使得

$V(x, t) \geq \alpha(\|x\|)$ 成立。定义

$$\alpha(p) = \inf_{p \leq \|x\| \leq R} V_0(x)$$

第二部分：定义函数 β 为

$$\beta(p) = \sup_{0 \leq \|x\| \leq p} V_1(x)$$

引理 3.6.2 考虑标量自治方程

$$\dot{y} = -\alpha(y), y(t_0) = y_0$$

其中 α 是定义在 $[0, a)$ 上的局部利普希茨 (Lipschitz) K 类函数。

对于所有 $0 << y_0 < a$, 当 $t >> t_0$ 时方程有唯一解 $y(t)$, 且

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$$

其中, σ 是定义在 $[0, a) \times [0, \infty)$ 上的 **KL** 类函数。

例 3.24 考察下面两个具体方程, 其解满足引理结论。

1. $\dot{y} = -ky, k > 0$
2. $\dot{y} = -ky^2, k > 0$

方程 1 的解为 $y = y_0 e^{-k(t-t_0)}$, 方程 2 的解为 $y = \frac{y_0}{1 + y_0 k(t-t_0)}$ 。满足引理结论。

由以上相关结论, 把定理 3.6.1 重新叙述如下:

定理 3.6.2 如果在平衡点 $\mathbf{0}$ 的领域球 B_{R_0} 内, 存在一个具有连续偏导数的标量函数 $V(x, t)$, 使得

$$1) V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) > 0;$$

$$2a) \dot{V}(x, t) \text{ 是半负定的,}$$

那么平衡点 $\mathbf{0}$ 是 Lyapunov 意义下稳定的。而且, 如果存在一个 K 类函数 β , 使得

$$3) V(x,t) \leq \beta(\|x\|)$$

那么原点是一致稳定的；

如果条件 1)、条件 3) 成立，且条件 2a) 替换为

$$2b) \dot{V}(x,t) \leq -\gamma(\|x\|) < 0$$

其中 γ 是另一个 K 类函数，那么平衡点是一致渐近稳定的。

如果在整个空间都满足条件 1)、条件 2b) 和条件 3)，且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(\|x\|) \rightarrow \infty$$

那么原点 0 是全局一致渐近稳定的。

证明：我们分三个部分进行证明。

1、Lyapunov 稳定：为了证明 Lyapunov 稳定，我们只需证明对给定的 $R > 0$ ，存在 $\gamma > 0$ ，使得式 (3.17) 成立。有条件 1) 和条件 2) 有

$$\alpha(\|x\|) \leq V[x(t), t] \leq V[x(t_0), t_0] \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.23)$$

因为 $V(x,t)$ 关于 x 连续，且 $V(0, t_0) = 0$ ，我们可以找到一个 r ，使得

$$\|x(t_0)\| < r \Rightarrow V(x(t_0), t_0) < \alpha(R) \quad (3.24)$$

这意味着如果 $\|x(t_0)\| < r$ ，那么 $\alpha(\|x(t)\|) < \alpha(R)$ ，因此，对 $\forall t \geq t_0$ ，有 $\|x(t)\| < R$

2. 一致稳定和一致渐近稳定：由条件 1) 和条件 3)，

$$\alpha(\|x\|) \leq V[x(t), t] \leq \beta(\|x(t)\|) \quad (3.25)$$

对 $\forall R > 0$ ，存在 $r(R) > 0$ ，使得 $\beta(r) < \alpha(R)$ 。选择初始状态 $x(t_0)$ ，

使得满足 $\|x(t_0)\| < r$ ，那么

$$\alpha(R) > \beta(r) \geq V[x(t_0), t_0] \geq V[x(t), t] \geq \alpha(\|x(t)\|) \quad (3.26)$$

这意味着

$$\forall t \geq t_0, \quad \|x(t)\| < R \quad (3.27)$$

因为 r 与 t_0 无关，所以原点 $\mathbf{0}$ 是一致稳定的。

证明一致渐近稳定的基本思想是：如果 x 不收敛于原点，那么存在一个正数 a ，使得 $-\dot{V}(x(t), t) \geq a > 0$ 。这意味着

$$V[x(t), t] - V[x(t_0), t_0] = \int_{t_0}^t \dot{V} dt \leq -(t - t_0)a \quad (3.28)$$

因此

$$0 \leq V[x(t), t] \leq V[x(t_0), t_0] - (t - t_0)a \quad (3.29)$$

当 t 增大时，就会产生矛盾。下面给出详细的证明。

令 $\|x(t_0)\| < r$ ，（ r 如前）。令 μ 是任意一个满足 $0 < \mu < \|x(t_0)\|$ 的正数。我们可以找到另一个正数 $\delta(\mu)$ ，使得 $\beta(\delta) < \alpha(\mu)$ 。定义

$$\varepsilon = \gamma(\delta), \quad \text{且令 } T = T(\mu, r) = \frac{\beta}{\varepsilon}$$

如果对于 $\forall t: t_0 \leq t \leq t_1 \equiv t_0 + T$ ，有 $\|x(t)\| > \mu$ ，那么

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(\mu) &\leq V[x(t_1), t_1] \leq V[x(t_0), t_0] - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\|x(s)\|) ds \leq V[x(t_0), t_0] - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\|x(\delta)\|) ds \\ &\leq V[x(t_0), t_0] - (t_1 - t_0)\varepsilon \leq \beta(r) - T\varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

这就产生了矛盾。因此一定存在 $t_2 \in [t_0, t_1]$ ，使得 $\|x(t_2)\| \leq \delta$ 。因此，

对所有的 $t \geq t_2$ 有

$$\alpha(\|x(t)\|) \leq V[x(t), t] \leq V[x(t_2), t_2] \leq \beta(\delta) < \alpha(\mu) \quad (3.31)$$

从而

$$\|x(t)\| < \mu \quad \forall t \geq t_0 + T \geq t_2 \quad (3.32)$$

3.6.3 全局一致渐近稳定相关定理

从实际应用的角度出发,我们把时变系统的稳定性概念进一步细化,然后给出稳定性与比较函数的关系,最后再给出一致稳定、一致渐近稳定及指数稳定的 Lyapunov 直接判别法定理。

定义 3.6.4 对于方程 $\dot{x} = f(x)$ 的平衡点 $x=0$ 。

(1)如果对于每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 满足

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.33)$$

则平衡点是稳定的。

(2)如果对于每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 与 t_0 无关, 且满足上式, 则平衡点是一致稳定的。

(3)如果平衡点不稳定, 那么它就是非稳定的。

(4)如果平衡点是稳定的, 且存在一个正常数 $c = c(t_0) > 0$, 对于 $\|x(t_0)\| < c$, 满足当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow 0$, 则平衡点是渐近稳定的。

(5)如果它是一致稳定的, 且存在独立于 t_0 的常数 $c > 0$, 满足对于所有 $\|x(t_0)\| < c$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t)$ 对 t_0 一致趋于零。即, 对于每个 $\eta > 0$, 存在 $T = T(\eta) > 0$, 满足

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (3.34)$$

则平衡点是一致渐近稳定的。

(6)如果它是一致稳定的, 可以任选择一个 $\delta(\varepsilon)$, 使得 $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$,

并且对于每对正数 $\eta > 0$ 和 $c > 0$, 存在 $T = T(\eta, c) > 0$, 满足

$$\|x(t)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \forall \|x(t_0)\| < c \quad (3.35)$$

则平衡点是全局一致渐近稳定的。

下面的引理给出用 KL 类函数定义的一致稳定性和一致渐近稳定性的等价关系

引理 3.6.3 对于方程 $\dot{x} = f(x, t)$ 的平衡点 $x = 0$ 。

1. 当且仅当存在一个 K 类函数 α 和独立于 t_0 的常数 $c > 0$, 满足

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c \quad (3.36)$$

时, 平衡点是一致稳定的。

2. 当且仅当存在一个 KL 类函数 β 和独立于 t_0 的常数 $c > 0$, 满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c \quad (3.37)$$

时, 平衡点是一致渐近稳定的。

3. 当且仅当上述不等式对于任意初始状态 $x(t_0)$ 都成立时, 平衡点是全局一致渐近稳定的。

正定函数与 K 类函数的关系

引理 3.6.4 设 $V: D \rightarrow R$ 是定义域为 $D \subset R^n$ 且包含原点的连续正定函数, 并设对于某个 $r > 0$ 有 $B_r \subset D$, 则对于所有 $x \in B_r$ 存在定义在 $[0, r]$ 上的 K 类函数 α_1, α_2 满足条件

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (3.38)$$

如果 $D = R^n$ 且 $V(x)$ 是径向无界的, 则存在 K_∞ 类函数 α_1, α_2 在 $[0, \infty)$

上有定义,使得上式对于任意 $x \in R^n$ 都成立。

引理证明参见文献[1]

时变系统的相关稳定性定理

定理 3.6.3(一致稳定定理)对于方程 $\dot{x} = f(x,t)$ 的平衡点 $x = 0$,
 $D \subset R^n$ 是包含平衡点的定义域, $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ 是连续可微函数,
且满足

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0 \quad (3.40)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ 其中 $W_1(x)$ 和 $W_2(x)$ 都是 D 上的连续正定函数。那么,
平衡点是一致稳定的。

证明: V 沿方程 $\dot{x} = f(x,t)$ 的轨线的导数为

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0 \quad (3.41)$$

选择 $r > 0, c > 0$, 满足 $B_r \subset D, c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, 那么集合

$$\{x \in B_r \mid W_1(x) \leq c\} \subset B_r \quad (3.42)$$

定义一个与时间无关的集合:

$$\Omega_{t,c} = \{x \in B_r \mid V(t, x) \leq c\} \quad (3.43)$$

由已知条件有

$$W_2(x) \leq c \Rightarrow V(t, x) \leq c \quad (3.44)$$

可得

$$\{x \in B_r \mid W_2(t, x) \leq c\} \subset \Omega_{t,c} = \{x \in B_r \mid V(t, x) \leq c\} \quad (3.45)$$

同样由已知条件 $V(t, x) \leq c \Rightarrow W_1(x) \leq c$

可得

$$\Omega_{t,c} = \{x \in B_r \mid V(t,x) \leq c\} \subset \{x \in B_r \mid W_1(t,x) \leq c\} \quad (3.46)$$

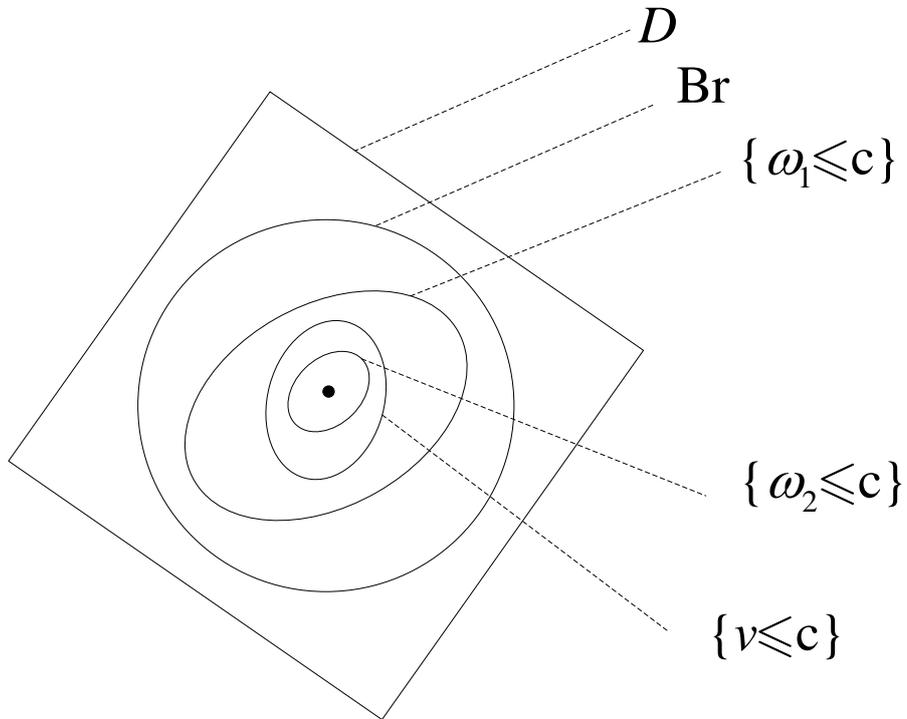


图 3.8 五个集合示意图

特别注意曲面 $V(t,x)=c$ 是与 t 有关，但处于独立于时间的曲面 $W_1(t,x)=c$ 和 $W_2(t,x)=c$ 之间。

由于在 D 上对于任何 $t_0 \geq 0$ 有 $\dot{V}(t,x) \leq 0$ ，所以对 $\forall x_0 \in \Omega_{t_0,c}$ ，当 $t \geq t_0$ 时，始于 (t_0, x_0) 的解保持在 $\Omega_{t,c}$ 内。由前述集合关系可知始于集合 $\{x \in B_r \mid W_2(t,x) \leq c\}$ 的任何解对未来所有时刻都保持在 $\Omega_{t,c}$ 内，从而也保持集合 $\{x \in B_r \mid W_1(t,x) \leq c\}$ 内。因此，对于所有 $t \geq t_0$ 的解有定义并且有界。

由 $\dot{V}(t,x) \leq 0$ 可得到

$$V(t,x(t)) \leq V(t_0,x(t_0)), \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.47)$$

在区间 $[0,r]$ 定义两个 \mathbf{K} 类函数 α_1, α_2 满足条件

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x(t)) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (3.48)$$

结合上述两个不等式可得到

$$\|x\| \leq \alpha_1^{-1}(W_1(x)) \leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(V(t_0, x(t_0))) \leq \alpha_1^{-1}(W_2(x(t_0))) \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|))$$

而 $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\cdot))$ 还是 \mathbf{K} 类函数。所以原点是一致稳定的。

定理 3.6.4 (一致渐近稳定性定理) 对于方程 $\dot{x} = f(x, t)$ 的平衡点 $x=0$, $D \subset R^n$ 是包含平衡点的定义域, $V: [0, \infty) \times D \rightarrow R$ 是连续可微函数, 且满足

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \quad (3.50)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ 其中 $W_1(x)$ 、 $W_2(x)$ 和 $W_3(x)$ 都是 D 上的连续正定函数。

那么, 平衡点是一致渐近稳定的。

如果选择 $r > 0, c > 0$, 满足 $B_r \subset D, c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, 则始于集合

$\{x \in B_r \mid W_2(t, x) \leq c\}$ 的每条轨线对于某个 KL 函数 β 都满足

$$\|x\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.51)$$

如果 $D = R^n$ 和 $W_1(x)$ 径向无界, 则平衡点是全局一致渐近稳定的。

证明: 由一致稳定定理证明可知, 对所有 $t \geq t_0$, 始于集合 $\{x \in B_r \mid W_2(t, x) \leq c\}$ 的任何解对未来所有时刻都保持在集合 $\{x \in B_r \mid W_1(t, x) \leq c\}$ 内。在区间 $[0, r]$ 定义一个 \mathbf{K} 类函数 α_3 满足条件

$$\dot{V}(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad (3.52)$$

利用不等式

$$V(t, x(t)) \leq \alpha_2(\|x\|) \Leftrightarrow \alpha_2^{-1}(V) \leq \|x\| \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \leq \alpha_3(\|x\|) \quad (3.53)$$

可见, V 满足微分不等式

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \leq -\alpha(V) \quad (3.54)$$

由微分不等式可得:

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t-t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, c] \quad (3.55)$$

因此, 任何始于 $\{x \in B_r \mid W_2(t, x) \leq c\}$ 的解都满足不等式

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t-t_0)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|), t-t_0)) \triangleq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) \end{aligned} \quad (3.56)$$

从而平衡点是一致渐近稳定的。

如果 $D = R^n$, 则 α_1, α_2 和 α_3 是定义在 $[0, \infty)$ 上的函数, 因而 α_1, β 与 c 无关。由于 $W_1(x)$ 径向无界, c 可以任意大, 是其包含 $\{x \in B_r \mid W_2(t, x) \leq c\}$ 内的初始状态。因此平衡点是全局一致渐近稳定的。

这个重要定理的证明很有技巧, 我们先看几个例子。

例 3.25 全局渐近稳定例子考查系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - e^{-2t} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

为了确定平衡点 $\mathbf{0}$ 的稳定性, 选择下面标量函数

$$V(x, t) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2$$

这个函数是正定的, 因为它能控制住一个时不变正定函数

$$x_1^2 + x_2^2$$

同时也具有无穷大上界, 因为它能被下面的时不变正定函数所控制

$$x_1^2 + 2x_2^2$$

而且

$$\dot{V}(x,t) = -2[x_1^2 - x_1x_2 + (1+2e^{-2t})x_2^2]$$

这表明

$$\dot{V}(x,t) \leq -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

因此， \dot{V} 是负定的。满足一致渐近稳定定理条件，所以平衡点 $\mathbf{0}$ 是全局一致渐近的。

时变系统的稳定性结果没有自治系统的稳定性结果那么直观，因此应用以上定理时要特别谨慎，下面我们举两个例子来说明。

对自治系统而言，如果 V 是正定的且 \dot{V} 是负定的，那么原点就是渐近稳定的。因此，我们自然想到：如果要使系统渐近稳定，以上条件是否足够呢？

例 3.26 具有无穷大上界条件的重要性

令 $g(t)$ 是一个连续可微的函数，除了在峰点处为 1 外，其它为 $e^{-\frac{t}{2}}$ 。特别地， $g^2(t)$ 的图形如图 3.9 所示，在 t 取整数处为 $g^2(t)$ 的峰点。

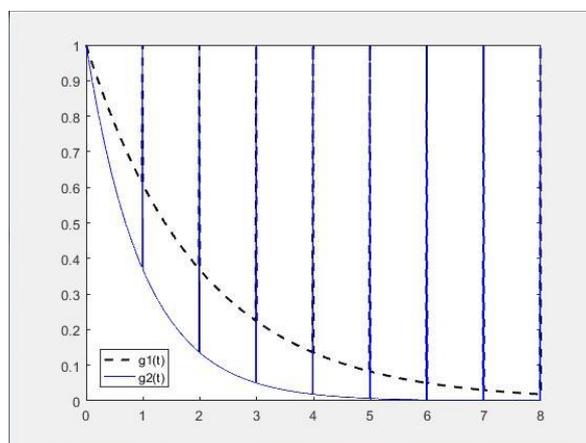


图 3.9 函数 $g^2(t)$ 图像

假设在横坐标 $t = n$ 处的峰点的宽度小于 $(1/2)^n$ 。所以 $g^2(t)$ 的无穷积分满足

$$\int_0^{\infty} g^2(r) dr < \int_0^{\infty} e^{-r} dr + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \quad (3.57)$$

因此标量函数

$$V(x, t) = \frac{x^2}{g^2(t)} \left[3 - \int_0^t g^2(r) dr \right] \quad (3.58)$$

是正定的 ($V(x, t) > x^2$)。

现在考虑一阶微分方程

$$\dot{x} = \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} x \quad (3.59)$$

选取 (3.58) 中的 $V(x, t)$ 为候选的 Lyapunov 函数, 容易得到

$\dot{V}(x, t) = -x^2$ 是定负的。然而 (3.59) 的通解为

$$x = \frac{g(t)}{g(t_0)} x(t_0) \quad (3.60)$$

因此原点不是渐近稳定的。

由于 V 的正定性和 \dot{V} 的半负定性已保证原点 Lyapunov 稳定, 人们很自然地推想到: 如果 \dot{V} 是负定的会导致怎样的新结果。可以证明, 如果 \dot{V} 是负定的, 那么可以找到一个无穷序列 t_i , 使得 $x(t_i) \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$ 。

另外一个需要注意的是: 在得出结论之前, 我们先看一个有趣的二阶动力系统

$$\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k_0x = 0 \quad (3.61)$$

其中 $c(t) \geq 0$ 是时变阻尼系数, k_0 是弹性常数。这是一个质量-弹簧-阻尼器系统 (质量为 1)。凭物理直觉, 如果阻尼 $c(t) \geq 0$ 保持大于一个严格的常数 (意味着持续不断消耗能量), 那么平衡点 $(0, 0)$ 是渐近稳定的, 正如自治非线性质量-弹簧-阻尼器系统的情况一样。然而, 这未必是正确的。实际上, 考虑系统

$$\ddot{x} + (2 + e^t)\dot{x} + x = 0 \quad (3.62)$$

很容易证明, 当初始状态为 $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -1$ 时, 系统的解为 $x(t) = 1 + e^{-t}$, 显然它趋近于 1。如果阻尼增加的足够快, 那么系统就固定在 $x = 1$ 处。

例 3.27 带有时变阻尼的渐近稳定性

$$\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k_0x = 0$$

取

$$V(x, t) = \frac{(\dot{x} + \alpha x)^2}{2} + \frac{b(t)}{2} x^2$$

其中 α 是任意一个小于 $\sqrt{k_0}$ 的正常数, 且

$$b(t) = k_0 - \alpha^2 + \alpha c(t)$$

容易计算得到

$$\dot{V} = [\alpha - c(t)]\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{2} [\dot{c}(t) - 2k_0]x^2$$

因此存在正数 α 和 β , 使得

$$c(t) > \alpha > 0 \quad \dot{c}(t) \leq \beta < 2k_0$$

那么 \dot{V} 是负定的。另外, 假设 $c(t)$ 有上界 (保证 V 具有无穷大上

界), 以上条件意味着系统是渐近收敛的。

下面给出指数稳定的定义和判定定理

定义 3.6.5 (指数稳定) 对于方程 $\dot{x} = f(x, t)$ 的平衡点 $x = 0$, 如果存在正常数 c, k, λ 满足

$$\|x\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall \|x(t_0)\| \leq c \quad (3.63)$$

则该平衡点是指数稳定的。如果上式对于任何初始状态 $x(t_0)$ 都成立, 则该平衡点是全局指数稳定的。

定理 3.6.5 (全局指数稳定) 对于方程 $\dot{x} = f(x, t)$ 的平衡点 $x = 0$, $D \subset R^n$ 是包含平衡点的定义域, $V: [0, \infty) \times D \rightarrow R$ 是连续可微函数, 且满足

$$k_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^a \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x\|^a \quad (3.65)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ 其中 k_1, k_2, k_3 和 a 都是正常数。那么, 平衡点是指数稳定的。如果上述假设全局成立, 那么平衡点是全局指数稳定的。

证明: 由一致稳定定理证明过程可知, 当 $t \geq 0$ 时, 对于足够小的 c , 始于 $\{k_2 \|x\|^a \leq c\}$ 的轨线都有界。由已知的不等式表明 V 满足微分不等式

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{k_3}{k_2} V \quad (3.66)$$

由比较定理可得到

$$V(t, x) \leq V(t_0, x(t_0)) e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)} \quad (3.67)$$

因此

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \left[\frac{V(t, x)}{k_1} \right]^{1/a} \leq \left[\frac{V(t_0, x(t_0))e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/a} \\ &\leq \left[\frac{k_2 \|x(t_0)\|^a e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/a} \leq \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{1/a} \|x(t_0)\| e^{-(k_3/k_2 a)(t-t_0)} \end{aligned} \quad (3.68)$$

所以，原点是指数稳定的。如果所有假设全局成立，则可选择 c 任意大，且上述不等式对于所有 $x(t_0) \in R^n$ 都成立。

例 3.28 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

其中， $g(t)$ 是连续可微函数，且满足

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(t) \leq k \\ \dot{g}(t) &\leq g(t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

平衡点的稳定性

证明 取 **Lyapunov** 函数 $V(t, x) = x_1^2 + [1 + g(t)]x_2^2$ ，容易得到

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x) = x_1^2 + [1 + k]x_2^2, \quad \forall x \in R^2$$

因此， $V(t, x)$ 是正定且径向无界。 $V(t, x)$ 沿系统轨线的导数为

$$\dot{V}(t, x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2 + 2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2$$

利用不等式

$$2 + 2g(t) - \dot{g}(t) \geq 2 + 2g(t) - g(t) \geq 2$$

$$\text{得到 } \dot{V}(t, x) \leq -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

其中矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 是正定的。因此平衡点是指数稳定的。

3.7 有界性和毕竟有界性

对于非线性时变系统 $\dot{x} = f(t, x)$ ，其中 $f: [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ 在定义域 $[0, \infty) \times D$ 上是 t 的分段连续函数，是 x 的局部 Lipschitz 函数，且 $D \subset R^n$ 是包含原点的定义域。如何把 Lyapunov 分析用于描述系统状态的有界性问题（即使在原点处无平衡点），是本节的重点。

首先我们给出相关状态有界的相关概念如下：

定义 3.7.1 对于上述时变系统 $\dot{x} = f(t, x)$

(1) 如果存在一个与 t_0 无关的正常数 $c, t_0 \geq 0$ ，对于每个 $a \in (0, c)$ ，存在与 t_0 无关的 $\beta = \beta(a) > 0$ ，满足

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.69)$$

则系统的解是一致有界的。

(2) 如果上式对于任意大的 a 都成立，则系统的解是全局一致有界的。

(3) 如果存在与 t_0 无关的正常数 $b, c, t_0 \geq 0$ ，对于每个 $a \in (0, c)$ ，存在与 t_0 无关的 $T = T(a, b) \geq 0$ ，满足

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (3.70)$$

则系统的解是一致毕竟有界的，且最终边界为 b 。

(4) 如果上式对于任意大的 a 都成立，则系统的解是全局一致毕竟有界的。

例 3.29 考虑标量方程

$$\dot{x} = -x + \delta \sin t, \quad x(t_0) = a, \quad a > \delta > 0$$

该方程无平衡点，且其解为

$$x(t) = e^{-(t-t_0)} a + \delta \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau$$

此解的边界为

$$x(t) \leq e^{-(t-t_0)} a + \delta \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-t_0)} a + \delta [1 - e^{-(t-t_0)}] \leq a, \quad \forall t \geq t_0$$

上式表明：对于所有 $t \geq t_0$ 解都有界，且对 t_0 一致，即边界与 t_0 无关。当此边界对于所有 $t \geq t_0$ 都成立时，它将随时间变化而成为解的保守估计，因为没有考虑到指数衰减项。

如果取任意数 b 满足 $\delta < b < a$ 则容易看出

$$|x(t)| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + \ln \left(\frac{a - \delta}{b - \delta} \right)$$

边界 b 同样与 t_0 无关，经过瞬态周期后，它给出解的更好估计。

这种解称为一致毕竟有界的， b 是最终边界。

下面通过 Lyapunov 分析说明系统

$$\dot{x} = -x + \delta \sin t, \quad x(t_0) = a, \quad a > \delta > 0$$

的解具有一致有界性和毕竟有界性而无需状态方程的显示解。

取 $V(x) = \frac{x^2}{2}$ ，计算沿系统轨线的导数得到

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} \leq -x^2 + \delta|x|$$

不等式的右边不是负定，因为在原点附件，正线性项 $\delta|x|$ 和 $-x^2$ 项相比起着决定作用。但在 $\{|x| \leq \delta\}$ 之外 $\dot{V}(x)$ 是负的。

由 $c > \delta^2 / 2$ 可知始于 $\{V(x) \leq c\}$ 的解在所有未来时刻都保持在其内，因为 $\dot{V}(x)$ 在边界 $V(x) = c$ 是负的。因此解是一致有界的。

而且，如果取任意数 $(\delta^2/2) < \varepsilon < c$ ，则 $\dot{V}(x)$ 在 $\{\varepsilon \leq V(x) \leq c\}$ 内为负，这说明在此集合内， $V(x)$ 单调递减直到解进入 $\{V(x) \leq \varepsilon\}$ 内。从那时候起，解将不再离开 $\{V(x) \leq \varepsilon\}$ ，因为 $\dot{V}(x)$ 在边界 $V(x) = \varepsilon$ 是负的。由此可以得到，解是一致毕竟有界的，且最终的边界为 $\{|x| \leq \sqrt{2\varepsilon}\}$

定理 3.7.1 (最终边界算法) 设 $D \subset R^n$ 是包含原点的定义域，设 $V: [0, \infty) \times D \rightarrow R, \forall t \geq 0, x \in D \subset R^n$ 是连续可微函数，满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (3.72)$$

式中 $\alpha_1(\|x\|), \alpha_2(\|x\|)$ 是 **K** 类函数， $W_3(x)$ 是连续正定函数。取 $r > 0, B_r \subset D$ 并假设

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (3.73)$$

那么，存在一个 **KL** 类函数 β ，且对于每个满足 $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ 的初始状态 $x(t_0)$ ，存在 $T(x(t_0), \mu)$ 使方程 $\dot{x} = f(x, t)$ 的解满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (3.74)$$

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (3.75)$$

而且，如果 $D = R^n$ ，且 $\alpha_1(\|x\|)$ 属于 K_∞ 函数，则上面两式对于任意初始状态 $x(t_0)$ 都成立，对 μ 的大小没有任何限制。

证明 利用稳定性定理 3.6.3 证明过程相关符号，设

$\rho = \alpha_1(r)$ ，则 $\alpha_2(\mu) < \rho$ ，且 $\alpha_2(\|x(t_0)\|) \leq \rho$ 。设 $\eta = \alpha_2(\mu)$ 并定义

$\Omega_{t, \eta} = \{x \in B_r \mid V(t, x) \leq \eta\}$ 和 $\Omega_{t, \rho} = \{x \in B_r \mid V(t, x) \leq \rho\}$ ，则

$$B_\mu \subset \Omega_{t, \eta} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leq \eta\} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leq \rho\} = B_r \subset D \quad (3.76)$$

和

$$\Omega_{t,\eta} \subset \Omega_{t,\rho} \subset B_r \subset D \quad (3.77)$$

集合 $\Omega_{t,\eta}, \Omega_{t,\rho}$ 具有始于这两个集合内的解不会离开该集合的性质，因为 $\dot{V}(t, x)$ 在边界上的值是负的。由

$$\alpha_2(\|x(t_0)\|) \leq \rho \Rightarrow x(t_0) \in \Omega_{t_0,\rho} \quad (3.78)$$

可得到对于所有 $t \geq t_0, x(t) \in \Omega_{t,\rho}$ 。始于 $\Omega_{t_0,\rho}$ 内的解在有限时间内一定会进入 $\Omega_{t,\eta}$ ，因为在集合上 $\{\Omega_{t,\rho} - \Omega_{t,\eta}\}$ ， $\dot{V}(t, x)$ 满足

$$\dot{V}(t, x) \leq -k < 0$$

(3.79)

其中在包含 $\{\Omega_{t,\rho} - \Omega_{t,\eta}\}$ 的集合 $\{\mu \leq \|x\| \leq r\}$ 上， $k = \min\{W_3(x)\}$ 。上面不等式可表示为

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) - k(t - t_0) \leq \rho - k(t - t_0) \quad (3.80)$$

该式说明在时间区间 $[t_0, t_0 + (\rho - \eta) / k]$ 内 $V(t, x(t))$ 简化为 η 。对于所有，始于 $\Omega_{t,\eta}$ 内的解都满足不等式 $\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ ， $\forall t \geq t_0 + T$ ，因为有 $\Omega_{t,\eta} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leq \alpha_2(\mu)\}$ 。对于始于 $\Omega_{t,\rho}$ 内但在 $\Omega_{t,\eta}$ 外的解，设 $t_0 + T$ 是首次进入 $\Omega_{t,\eta}$ 的时刻。对于所有 $t \in [t_0, t_0 + T]$ ，

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \leq \alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) = -\alpha(V) \quad (3.81)$$

与定理 3.6.3 证明类似，可以证明存在一个 KL 类函数 σ ，使得

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad (3.82)$$

定义函数 $\beta(r, s) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2), s)$ ，可得

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad (3.83)$$

如果 $D = R^n$ ，可选择 α_3 及 β 与 ρ 无关。如果 α_1 属于 K_∞ 类函数，则

α_2 也是 K_∞ 类函数，且可通过选取足够大的 ρ ，使界 $\alpha_2^{-1}(\rho)$ 取得任意大，因此集合 $\{\|x\| \leq \alpha_2^{-1}(\rho)\}$ 内可包含任何初始状态 $x(t_0)$ 。

例 3.30 对具有硬化弹簧、线性粘滞阻尼并施加周期外力的用下列杜芬（Duffing）方程表示弹簧系统

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2 y^3 = A \cos \omega t$$

取 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ ，并且假设对各常数取几个数值。系统的状态方程表示为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1+x_1^2)x_1 - x_2 + M \cos \omega t \end{aligned}$$

其中 $M \geq 0$ 是与周期性外力的幅度成正比的。当 $M = 0$ 时，系统在原点有一个平衡点。

取 Lyapunov 函数：

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + 2 \int_0^{x_1} (y + y^2) dy \\ &= x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + x_1^2 + \frac{1}{2} x_1^4 \\ &= x^T \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} x_1^4 \end{aligned}$$

是正定径向无界的，其沿系统的导数为：

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_1^4 - x_2^2 + (x_1 + 2x_2)M \cos \omega t \leq -\|x\|_2^2 - x_1^4 + M\sqrt{5}\|x\|_2$$

$$\dot{V}(x) \leq -(1-\theta)\|x\|_2^2 - x_1^4 - \theta\|x\|_2^2 + M\sqrt{5}\|x\|_2$$

其中 $0 < \theta < 1$ 则

$$\dot{V}(x) \leq -(1-\theta)\|x\|_2^2 - x_1^4, \quad \forall \|x\|_2 \geq \frac{M\sqrt{5}}{\theta}$$

上式说明对于 $\mu = \frac{M\sqrt{5}}{\theta}$ ，系统的解是全局一致最终有界的。

假如要计算最终边界值，此时必须找出函数 α_1, α_2 。由不等式

$$V(t, x) \geq x^T P x \geq \lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2$$

$$V(t, x) \leq x^T P x + \frac{1}{2}\|x\|_2^4 \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|_2^4$$

看出 α_1, α_2 可取为

$$\alpha_1 = \lambda_{\min}(P)r^2$$

$$\alpha_2 = \lambda_{\max}(P)r^2 + \frac{1}{2}r^2$$

因此，最终边界为

$$b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \sqrt{\frac{\alpha_2(\mu)}{\lambda_{\min}(P)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)\mu^2 + \mu^4/2}{\lambda_{\min}(P)}}$$

3.8 输入-状态稳定性

本节讨论控制系统在有界输入的情况下，系统的状态是否保持有界？

先看线性时不变系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 的情形。

线性系统的解可以表示为

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau \quad (3.84)$$

其中 A 矩阵保持为 **Hurwitz** 矩阵才能使系统有意义。利用边界条件 $\|e^{(t-t_0)A}\| \leq k e^{-\lambda(t-t_0)}$ 对解进行估值, 有

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq k e^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t k e^{-\lambda(t-\tau)} \|B\| \|u(\tau)\| d\tau \\ &\leq k e^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \frac{k \|B\|}{\lambda} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \end{aligned} \quad (3.85)$$

上式表明: 零输入状态响应按指数规律快速衰减到零, 而零状态响应对应于每个有界输入都是有界的。从而可得到

结论 线性系统零状态响应对每个有界输入都是有界的。

然而对于一般非线性系统上面结论不一定成立, 为此考察下面的反例

例 3.31 标量系统 $\dot{x} = -3x + (1 + 2x^2)u$, 当 $u = 0$ 时, 原点是全局指数稳定的。然而当 $x(0) = 2$ 和 $u(t) = 1$ 时, 标量系统方程的解

$x(t) = (3 - e^t) / (3 - 2e^t)$ 是无界的, 但它有有限的逃逸时间为 $t = \ln \frac{3}{2}$ 。

定义 3.8.1 如果存在一个 **KL** 类函数 β 和一个 **K** 类函数 γ , 使对于任何初始状态 $x(t_0)$ 和有界输入 $u(t)$, 解 $x(t)$ 对于所有 $t \geq t_0$ 都存在, 且满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(x(t_0), t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right)$$

那么系统是输入-状态稳定的。

定理 3.8.1 (输入-状态稳定) 设 $V : [0, \infty) \times R^n \rightarrow R$ 是连续可微函数, 满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0 \quad (3.86)$$

$\forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times R^n \times R^m$, 其中 α_1, α_2 是 κ_∞ 类函数, ρ 是 κ 类函数, W_3 是 R^n 上的连续正定函数。则系统是输入-状态稳定的,

$$\gamma = \alpha_1^{-1} \times \alpha_2 \times \rho$$

证明 利用定理 3.7.1 的全局定义, 发现解存在并且满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(x(t_0), t - t_0) + \gamma \left(\sup_{\tau \geq t_0} \|u(\tau)\| \right), \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.87)$$

由于当 $t_0 \leq \tau \leq t$ 时, 解 $x(t)$ 仅取决于 $u(\tau)$, 在 $[t_0, t]$ 上取上式右边的上确界, 结论成立。

例 3.32 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \end{aligned}$$

先设 $u = 0$, 研究无激励系统原点的全局渐近稳定性。利用

Lyapunov:

$$V(t, x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{4} a x_2^4, \quad a > 0$$

可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= -x_1^2 + x_1 x_2^2 - a x_2^4 \\ &= -(x_1 - \frac{1}{2} x_2^2)^2 - (a - \frac{1}{4}) x_2^4 \end{aligned}$$

选择 $a > 1/4$, 则原点是全局渐近稳定的。

现在假设 $u \neq 0, a = 1$ 则

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x) &= -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4) + x_2^3 u \\ &\leq -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + |x|^3 |u|\end{aligned}$$

为了利用 $-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4)$ 去控制 $|x|^3 |u|$ 一项，把前面的不等式重写为：

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{1}{2}(1-\theta)(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}\theta(x_1 - x_2)^2 + |x|^3 |u|$$

其中 $0 < \theta < 1$ 。如果 $|x_2| \geq 2|u|/\theta$ 或者 $|x_2| \leq 2|u|/\theta, |x_1| \geq (2|u|/\theta)^3$ ，则

$$-\frac{1}{2}\theta(x_1 - x_2)^2 + |x|^3 |u| \leq 0$$

上述条件可表示为

$$\max\{|x_1|, |x_2|\} \geq \max\left\{\frac{2|u|}{\theta}, \left(\frac{2|u|}{\theta}\right)^2\right\}$$

利用范数 $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ 同时定义 \mathbf{K} 类函数为 $\rho(r)$

$$\rho(r) = \max\left\{\frac{2r}{\theta}, \left(\frac{2r}{\theta}\right)^2\right\}$$

由此可知，当

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{1}{2}(1-\theta)(x_1 - x_2)^2, \quad \forall \|x\|_\infty \geq \rho(|u|)$$

因此系统是输入-状态稳定的。

3.9 输入-输出稳定性

输入-输出法是动力学系统建模的一种方法，输入-输出模型使系统的输出直接与系统的输入联系，无需了解状态方程的内部结构，系统被看作一个黑盒子，只能通过系统的输入端和输出端访问。

3.9.1 L 稳定性

考虑一个系统，其输入-输出关系表示如下：

$$y = Hu \quad (3.88)$$

其中 H 是某种映射或者算子，指定了 y, u 的关系。输入 u 属于信号空间，信号空间把时间区间 $[0, \infty)$ 映射到欧几里得空间 R^m ，即 $u: [0, \infty) \rightarrow R^m$ 。例如分段连续的有界函数空间 $\sup_{t \geq 0} \|u\| < \infty$ 和分段

连续的平方可积空间 $\int_0^\infty u^T(t)u(t)dt < \infty$ 。为度量信号的大小，引入范数 $\|u\|$ ，满足下面三个性质：

- 当且仅当信号恒为零时，信号的范数等于零，否则严格为正。
- 对于任意正常数 a 和信号 u ，数乘信号的范数等于范数的数乘，即 $\|au\| = a\|u\|$
- 对于任意信号 u_1, u_2 ，范数满足三角不等式 $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$

对于分段连续有界函数空间，其范数定义为

$$\|u\|_{L_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty \quad (3.89)$$

该空间表示为 L_∞^m

对于连续平方可积空间，其范数定义为

$$\|u\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)u(t)dt} < \infty \quad (3.90)$$

该空间表示为 L_2^m

一般情况下，对于 $1 \leq p < \infty$ ，空间 L_p^m 定义为连续函数 $u: [0, \infty) \rightarrow R^m$ 的集合，满足：

$$\|u\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (3.91)$$

如果认为 $u \in L^m$ 是“良态”输入，要问的问题是能否有“良态”输出 $y \in L^q$ 。由“良态”输入产生“良态”输出的系统是稳定系统。但不能把 H 定义为从 $u \in L^m$ 到 $y \in L^q$ 的映射，因为必须处理不稳定系统，而不稳定系统的输入 $u \in L^m$ 可能产生不属于 L^q 的输出 y 。所以， H 经常定义为从扩展空间 L_e^m 到扩展空间 L_e^q 的映射，其中 L_e^m 定义为

$$L_e^m = \{u \mid u_\tau \in L^m, \forall \tau \in [0, \infty)\} \quad (3.92)$$

u 的截断函数定义为

$$u_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (3.93)$$

扩展空间 L_e^m 是以未扩展空间 L^m 作为其子空间的线性空间，它便于对无限增加的信号加以处理。例如信号 $u(t) = t$ 不属于空间 L_∞ ，但是对于每个有限的 τ ，其截断函数为

$$u_\tau(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (3.94)$$

属于 L_∞ 。因此， $u(t) = t$ 属于扩展空间 $L_{\infty e}$

如果在任何时刻 t ，输出 $(Hu)(t)$ 只与该时刻的输入值有关，则称映射 $L_e^m \rightarrow L_e^q$ 是因果的。这相当于

$$(Hu)_\tau = (Hu_\tau)_\tau \quad (3.95)$$

因果性是状态模型表示的动力学系统的内涵性质。

定义 3.9.1 (输入-输出稳定性) 如果存在定义在 $[0, \infty)$ 上的 K 类函数 α 和非负常数 β ，对于所有 $u \in L_e^m$ ， $\tau \in [0, \infty)$ 满足

$$\|(Hu)_\tau\|_L \leq \alpha(\|u_\tau\|_L) + \beta \quad (3.96)$$

则映射 $L_e^m \rightarrow L_e^q$ 是 L 稳定的。

如果存在非负常数 γ, β , 对于所有 $u \in L_e^m, \tau \in [0, \infty)$ 满足

$$\|(Hu)_\tau\|_L \leq \gamma \|u_\tau\|_L + \beta \quad (3.97)$$

则映射 $L_e^m \rightarrow L_e^q$ 是有限增益 L 稳定的。

例 3.33 无记忆的也可能是时变的函数 $h: [0, \infty) \times R \rightarrow R$ 可以看成

是算子, 它对于每个输入信号 $u(t)$ 赋予输出信号 $y(t) = h(t, u(t))$ 。

我们用这一简单算子说明 L 稳定性的定义。设

$$h(t, u(t)) = a + b \frac{e^{cu} - e^{-cu}}{e^{cu} + e^{-cu}}$$

其中 a, b, c 为非负常数。由

$$h'(t, u(t)) = \frac{4bc}{(e^{cu} + e^{-cu})^2} \leq bc, \quad \forall u \in R$$

应用中值定理可以得到

$$|h(t, u(t))| \leq a + bc |u|, \quad \forall u \in R$$

因此, H 是有限增益 L_∞ 稳定的。其中 $\gamma = bc, \beta = a$ 。进一步, 如果 $a = 0$, 则对于每个 $p \in [1, \infty)$, 有

$$\int_0^\infty |h(t, u(t))|^p dt \leq (bc)^p \int_0^\infty |u|^p dt, \quad \forall u \in R$$

这样, 对于每个 $p \in [1, \infty)$, 算子 H 是有限增益 L_∞ 稳定的, 偏项为零, 且 $\gamma = bc$ 。设 h 是时变函数, 对于某个正数 a 满足

$$|h(t, u(t))| \leq a |u|, \quad \forall t \geq 0, \forall u \in R$$

则对于每个 $p \in [1, \infty)$, 映射 H 是有限增益 L_∞ 稳定的, 偏项为零,

且 $\gamma = a$ 。最后, 假设 $h(t, u(t)) = u^2$ 。由于

$$\sup_{t \geq 0} |h(t, u(t))| \leq (\sup_{t \geq 0} |u(t)|)^2$$

映射 H 是 L_∞ 稳定的, 偏项为零, 且 $\alpha(r) = r^2$ 。但不是有限增益 L_∞ 稳定的, 因为对于所有 $u \in R$, 函数不以形如 $|h(u(t))| \leq \gamma|u| + \beta$ 的直线为界。

3.9.2 状态模型的 L 稳定性

输入-输出稳定性的概念具有直观性希望在有限输入-有限输出稳定性的结构下研究动力学系统稳定性概念。Lyapunov 稳定性着重研究平衡点的稳定性和状态变量的渐近稳定性, 本节主要从 Lyapunov 稳定性的形式体系研究输入-输出的稳定性, 即如何用 Lyapunov 稳定性工具建立由状态模型表示的非线性系统的 L 稳定性问题。

考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0 \quad (3.98)$$

$$y = h(t, x, u) \quad (3.99)$$

其中 $x \in R^n, u \in R^q, f: [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow R^n$ 是关于 t 的分段函数, 且是 (x, u) 的局部利普希茨 (Lipschitz) 函数, $h: [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow R^q$ 是关于 t 的分段函数, 且是 (x, u) 的连续函数, $D \subset R^n$ 是包含 $x = 0$ 的定义域, $D_u \subset R^m$ 是包含 $u = 0$ 的定义域。对于每个固定的 $x_0 \in D$ 状态方程的解定义了一个算子 H 它对应每个输入信号 u 赋予相应的输出信号 $y(t)$ 。假设 $x = 0$ 是无激励系统。

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \quad (3.100)$$

的平衡点。讨论的主要问题是：如果上述方程的原点是一致渐进稳定的，那么在 f, h 满足一定假设下，对于某一信号空间 L ，系统就是 L 稳定的或者小信号 L 稳定的。

定理 3.9.1 系统 (3.98) - (3.100)，取 $r > 0, r_u > 0$ ，使得 $\{\|x\| \leq r\} \subset D, \{\|u\| \leq r_u\} \subset D_u$ 。假设

- $x = 0$ 是系统 (3.100) 的指数稳定平衡点，且存在 Lyapunov 函数 $V(t, x)$ ，对于所有 $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ 及正常数 c_1, c_2, c_3, c_4 满足

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -c_3 \|x\|^2 \quad (3.102)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial t} \right\| \leq c_4 \|x\| \quad (3.103)$$

- 对于所有 $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$ 和非负常数 L, η_1, η_2 ， f, h 满足不等式

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L \|u\| \quad (3.104)$$

$$\|h(t, x, u)\| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\| \quad (3.105)$$

则对满足 $\|x_0\| \leq r \sqrt{c_1/c_2}$ 的每个 x_0 系统 (3.98) - (3.100) 是小信号有限增益 L_p 稳定的， $p \in [0, \infty]$ 。特别地，当每个 $u \in L_{pe}$ 满足 $\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq \min\{r_u, c_1 c_3 / (c_2 c_4 L)\}$ 时，对于所有 $\tau \in [0, \infty)$ ，输出 $y(t)$ 满足 $\|y_\tau\|_{L_p} \leq \gamma \|u_\tau\|_{L_p} + \beta$

其中

$$\gamma = \eta_2 + \frac{\eta_1 c_1 c_4 L}{c_1 c_2} \quad (3.106)$$

$$\beta = \eta_1 \|x_0\| \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho \quad (3.107)$$

$$\rho = \begin{cases} 1, & p = \infty \\ \left(\frac{2c_2}{c_3 p} \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty) \end{cases}, \quad (3.108)$$

此外，如果原点是全局指数稳定的，且所有假设都全局成立（ $D \in R^n, D_u \in R^m$ ），则对每个 $x_0 \in R^n$ 系统 (3.98) - (3.100) 是有限增益 L_p 稳定的， $p \in [0, \infty]$

定理 3.9.2 系统 (3.98) - (3.100)，取 $r > 0$ ，使得 $\{\|x\| \leq r\} \subset D$ 。

假设

- $x=0$ 是系统 (3.100) 的一致渐近稳定平衡点，且存在 Lyapunov 函数 $V(t, x)$ ，对于所有 $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ 及 \mathbf{K} 类函数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad (3.110)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial t} \right\| \leq \alpha_4(\|x\|) \quad (3.111)$$

- 对于所有 $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$ 和 \mathbf{K} 类函数 $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ 和非负常数 η, f, h 满足不等式

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq \alpha_5(\|u\|) \quad (3.112)$$

$$\|h(t, x, u)\| \leq \alpha_6(\|x\|) + \alpha_7(\|u\|) + \eta \quad (3.113)$$

则对满足 $\|x_0\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ 的每个 x_0 系统 (3.98) - (3.100) 是小信号 L_∞ 稳定的。

定理 3.9.3 系统 (3.98) - (3.99), 取 $D = R^n, D_u = R^m$, 假设

- 系统 (3.100) 是输入-状态稳定
- 对于所有 $(t, x, u) \in [0, \infty) \times R^n \times R^m$, \mathbf{K} 类函数 α_1, α_2 和非负常数 η , h 满足不等式

$$\|h(t, x, u)\| \leq \alpha_1(\|x\|) + \alpha_2(\|u\|) + \eta \quad (3.114)$$

则对每个 $x_0 \in R^n$, 系统 (3.98) - (3.99) 是 L_∞ 稳定的。

例 3.34 考虑二阶单输入-单输出非线性时变系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(t)x_1 - x_2^3 + u \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

其中, 对于 $t \geq 0$, $g(t)$ 是连续且有界的。

取 $V = x_1^2 + x_2^2$, 则有

$$\dot{V} = -2x_1^4 - 2x_2^4 + 2x_2u$$

由于

$$x_1^4 + x_2^4 \geq \frac{1}{2} \|x\|_2^4$$

可以得到

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -2x_1^4 - 2x_2^4 + 2x_2u \\
&\leq -\|x\|_2^4 + 2\|x\|_2|u| \\
&= -(1-\theta)\|x\|_2^4 - \theta\|x\|_2^4 + 2\|x\|_2|u|, \quad 0 < \theta < 1 \\
&\leq -(1-\theta)\|x\|_2^4, \quad \forall \|x\|_2 \geq \left(\frac{2|u|}{\theta}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

当时 $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$, $W_3(x) = -(1-\theta)\|x\|_2^4$, $\rho(r) = (2r/\theta)^{1/3}$, 状态方程是输入-状态稳定的, 且系统是 L_∞ 稳定的。

3.9.3 L_2 增益

L_2 稳定性在系统分析中起着特殊作用。很自然我们选择的信号是平方可积信号, 它是一种有限能量信号。在许多控制问题中, 把系统表示为一种输入-输出映射, 即从一个干扰输入 u 到收控输出 y 的映射, 要求 y 足够小。对于 L_2 输入信号, 控制系统要设计为使输入-输出映射为有限增益 L_2 稳定的, 而且使 L_2 增益最小。

定理 3.9.4 考虑线性时不变系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx + Du
\end{aligned} \tag{3.115}$$

其中 A 为 Hurwitz 阵。设 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 则系统的 L_2 增益为 $\sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2$

定理 3.9.5 考虑非线性时不变系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + G(x)u, \quad x(0) = x_0 \\
y &= h(x)
\end{aligned} \tag{3.116}$$

其中 $f(x)$ 是局部 Lipschitz 的, $G(x), h(x)$ 在 R^n 上连续。 $G(x)$ 为 $n \times m$ 矩阵, $h(x): R^n \rightarrow R^q$ 。函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 在原点为零, 即

$f(0)=0, h(0)=0$ 。设 γ 为正数，并假设对于所有 $x \in R^n$ ，存在一个连续可微的半正定函数 $V(x)$ ，满足不等式

$$H(V, f, G, h, \gamma) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x) G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (3.117)$$

则对于每个 $x_0 \in R^n$ ，上述非线性系统为有限 L_2 增益稳定的，且其 L_2 增益小于或等于 γ 。

例 3.35 考虑单输入-单输出系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_1^3 - kx_2 + u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

其中 a, k 是正常数。可以证明无激励系统的原点是全局渐近稳定的。

利用 $V(x) = \alpha(ax_1^4/4 + x_2^2/2), \alpha > 0$ 作为备选解，可以得到

$$H(V, f, G, h, \gamma) = \left(-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\right) x_2^2 \leq 0$$

取 α, γ ，使

$$-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

或者

$$\gamma^2 \geq \frac{\alpha^2}{2\alpha k - 1}$$

目的是为了得到可能的最小值 γ ，故选择 α 使上述不等式的右边最小。在 $\alpha = 1/k$ 时， γ 取到最小值 $\alpha = 1/k^2$ ，因此，选取 $\gamma = 1/k$ ，可得到系统是有限增益 L_2 稳定的。

3.10 Barbalat 引理与类 Lyapunov 分析

在时不变的稳定性理论里，当能量函数沿系统的导数是半负定时，利用不变集定理可以推导出渐近稳定性的结果。然而，不变集定理不能应用于时变系统。一个重要而简单且能部分弥补这种情况的结果就是 Barbalat 引理。Barbalat 引理是一个关于函数及其导数的渐进性质的纯数学结论，当把这个引理适当应用于动力系统，可以导致关于渐近稳定问题的许多较好结果。

3.10.1 函数及其导数的渐近性质

在讨论 Barbalat 引理之前，我们先弄清楚几点关于函数及其导数的渐近性质。

设给定一个关于 t 的可微函数 f ，下面 3 个重要事实是函数的基本结论：

- $\dot{f} \rightarrow 0 \not\Rightarrow f$ 收敛；

即 $\dot{f} \rightarrow 0$ 并不能推出当 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t)$ 存在极限。

几何上，导数趋于零意味着倾斜线越来越平。然而，这并不意味着这个函数存在极限。

例 3.36 设函数 $f(t) = \sin(\log t)$ ，而其导函数具有性质：

$$\dot{f}(t) = \frac{\cos(\log t)}{t} \rightarrow 0, \text{ 当 } t \rightarrow \infty$$

但是函数 $f(t) = \sin(\log t)$ 一直是振荡的（速度越来越慢）。

而函数 $f(t) = \sqrt{t} \sin(\log t)$ 是无界的，但同样有这种性质。

- f 收敛 $\not\Rightarrow \dot{f} \rightarrow 0$

这就是说：当 $t \rightarrow \infty$ 时， $f(t)$ 存在有限极限并不意味着

$$\dot{f} \rightarrow 0$$

例 3.37 函数 $f(t) = e^{-t} \sin(e^{2t})$ 趋于 0，而其导数为

$$\dot{f} = -e^{-t} \sin(e^{2t}) + 2e^t \cos(e^{2t})$$

是一个无界的函数。

类似，函数 $f(t) = e^{-t} \sin^2(e^{2t}) \geq 0$ ，其导函数 \dot{f} 是无界的。

- 如果 f 有下界且是递减的 ($\dot{f} \leq 0$)，那么 f 存在极限。

这是微积分中的一个标准结果。然而，这并没有表明曲线的斜率是否趋于 0

3.10.2 Barbalat 引理

我们现在考虑：在给定存在有限极限的函数时，需要附加什么条件可以保证它的导数一定收敛于 0？

引理 3.10.1 (Barbalat 引理) 如果可微函数 $f(t)$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时存在有限极限，且 \dot{f} 一致连续，那么当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ 。

证明 1 函数一致连续的定义为：

连续函数 $g(t)$ 在 $[0, \infty)$ 是连续的，如果

$$\begin{aligned} \forall t_1 \geq 0, \forall R > 0, \exists \eta(R, t_1) > 0, \forall t \geq 0, \\ |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R \end{aligned} \quad (3.118)$$

一致连续 $g(t)$ 在 $[0, \infty)$ 是一致连续的，如果

$$\begin{aligned} \forall R > 0, \exists \eta(R) > 0, \forall t_1, t \geq 0, \\ |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R \end{aligned} \quad (3.119)$$

事实：可微函数一致连续的充分条件是它的导数是有界的。因为

$$g(t) - g(t_1) = \dot{g}(t_2)(t - t_1) \quad (3.120)$$

从而有：

$$|g(t) - g(t_1)| \leq M |t - t_1| \quad (3.121)$$

2 Barbalat 引理的证明: 如果当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{f}(t)$ 不趋于零, 那么 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall T > 0, \exists t > T, |\dot{f}(t)| \geq \varepsilon_0$ 。因此我们可以找到一个无穷序列 t_i (当 $i \rightarrow \infty$ 时, $t_i \rightarrow \infty$) 使得 $|\dot{f}(t_i)| \geq \varepsilon_0$ 。由于假设 $f(t)$ 是一致连续的, 所以 $\exists \eta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \forall t', t'': |t' - t''| < \eta, \text{ 有} \\ |\dot{f}(t') - \dot{f}(t'')| < \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned} \quad (3.122)$$

这表明对 t_i 的 η 邻域中的任意一点 t (即, 使得 $|t - t_i| < \eta$), 有

$$|\dot{f}(t)| > \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (3.123)$$

由此, 对任意的 t_i , 有

$$\left| \int_{t_i - \eta}^{t_i + \eta} \dot{f}(t) dt \right| = \int_{t_i - \eta}^{t_i + \eta} |\dot{f}(t)| dt \geq \frac{\varepsilon_0}{2} 2\eta = \varepsilon_0 \eta \quad (3.124)$$

这里左边的等号是根据 \dot{f} 在积分区间不变号

这与已知 $\int_0^t \dot{f}(r) dr$ 存在极限项矛盾。

推论 3.10.1 如果可微函数 $f(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时存在有限极限, \dot{f} 存在且有界, 那么当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ 。

通过下面例子说明如何判断控制系统中信号的一致连续性。

例 3.38 考查输入有界的严格稳定的线性系统。证明系统的输出是一致连续的。

证明 把线性系统写成

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.125}$$

由于 u 有界且系统是严格稳定，所以状态 x 是有界的。由第一个方程得 \dot{x} 是有界的。因此，从第二个方程的 $\dot{y} = C\dot{x}$ 是有界的，从而系统的输出是一致连续的。

3.10.3 利用 Barbalat 引理作稳定性分析

为了在动力系统分析中运用 Barbalat 引理，典型的做法是使用下面的一个直接推论。这个推论十分类似于 Lyapunov 分析中的不变集定理。

引理 3.10.2 (类 Lyapunov 引理) 如果标量函数满足下面的条件

- $V(x, t)$ 有下界；
- $\dot{V}(x, t)$ 是半负定的；
- $\dot{V}(x, t)$ 对时间是一致连续的。

那么 $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

事实上， $V(x, t)$ 存在有限极限 V_∞ ，使得 $V_\infty \leq V(x(0), 0)$ ，于是由 Barbalat 引理可以得到结论。

通过下面一个简单自适应控制系统的渐近稳定性分析说明如何在控制设计中应用 Barbalat 引理

例 3.39 带有一个未知参数的一阶自适应控制系统的闭环误差动力系统为

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -e + \theta\omega(t) \\ \dot{\theta} &= -e\omega(t)\end{aligned}$$

其中 e 和 θ 是闭环动力系统的两个状态，分别表示跟踪误差和

参数误差， $\omega(t)$ 是有界的连续函数。下面分析这个系统的渐近性质。

考查有下界函数

$$V = e^2 + \theta^2$$

其导数为

$$\dot{V} = -2e^2 \leq 0$$

这表明 $V(t) \leq V(0)$ ，因此， e 和 θ 是有界的。但不能由不变集推出 e 的收敛性，因这是一个非自治系统。

为了利用 **Barbalat** 引理，我们验证 \dot{V} 的一致连续性。 \dot{V} 的导数为

$$\ddot{V} = -4e(-e + \theta\omega)$$

这表明 \ddot{V} 是有界的，因为根据假设 ω 是有界的，且前面已经证明了 e 和 θ 是有界的。因此， \dot{V} 的一致连续性的。由 **Barbalat** 引理得到 $e \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

注意：虽然 $e \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ，但是系统不是渐近稳定的，因为这里只能保证 θ 是有界的。

3.11 平衡点不稳定定理

上述各节从 **Lyapunov** 直接法研究非线性系统稳定性的充分条件，下面我们将从 **Lyapunov** 直接法给出三个不稳定的结论。首先引入下面定理中用到的概念。设 $V: D \rightarrow R$ 是包含原点 $x=0$ 的 $D \subset R^n$ 上的一个连续可微函数。假设 $V(0)=0$ ，且存在任意接近原点的某一点 x_0 ，满足 $V(x_0) > 0$ 。选择 $r > 0$ ，使得球

$B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq r\}$ 包含在 D 内，并设

$$U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\} \quad (3.126)$$

集合 U 是包含在 B_r 内的非空集，其边界是曲面 $V(x) = 0$ 和球 $\|x\| = r$ 。由于 $V(0) = 0$ ，所以原点在 B_r 内，位于 U 的边界上。注意 U 可能包含不止一个分量。图所示为当 $V(x) = (x_1^2 - x_2^2)/2 > 0$ 时的集合。如果 $V(0) = 0$ ，且存在任意接近原点的某一点 x_0 ，满足 $V(x_0) > 0$ ，总可以构造集合 U 。

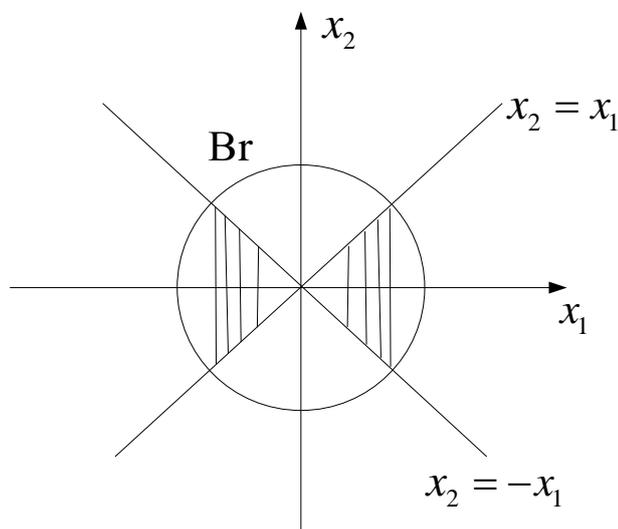


图 3.9 $V(x) = (x_1^2 - x_2^2)/2 > 0$ 集合

定理 3.11.1 (第一不稳定性定理) 如果在原点的某个邻域 Ω 内，存在一个连续可微的具有无穷大上界的标量函数 $V(x, t)$ ，使得

- $V(0, t) = 0, \forall t \geq t_0$;
- $V(x, t_0)$ 是可在任意接近于原点处取正值;
- $\dot{V}(x, t)$ 是正定的 (在 Ω 内局部正定);

那么原点 0 于 t_0 时刻是不稳定的。

注：第二个条件比 $V(x, t)$ 是正定条件弱。如： $V(x, t) = x_1^2 - x_2^2$ 显然

不是正定的，但是它在任意接近于原点处可取正值（沿着 $x_2 = 0, V(x) = x_1^2$ ）

证明 点 x_0 在 U 内，且有 $V(x_0) = a > 0$ 。始于 $x(0) = x_0$ 的轨线 $x(t)$ 一定会离开集合。为了说明这一点，注意到只要 $x(t)$ 在 U 内，就有 $V(x) \geq a$ ，这是因为在 U 内有 $\dot{V}(x) > 0$ 。设

$$\gamma = \min\{\dot{V}(x) \mid x \in U, V(x) \geq a\} \quad (3.127)$$

由于连续函数 $\dot{V}(x)$ 在紧集 $\{x \in U, V(x) \geq a\}$ 内有最小值，所以上式成立。那么 $\gamma > 0$ ，且有

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \geq a + \int_0^t \gamma ds = a + \gamma t \quad (3.128)$$

该不等式说明 $x(t)$ 不可能永远保持在 U 内，因为 $V(x)$ 的边界在 U 上。由于 $V(x) \geq a$ ，所以 $x(t)$ 不可能通过曲面 $V(x) = 0$ 而离开 U ，只能通过球面 $\|x\| = r$ 离开 U 。因为对于具有任意小 $\|x_0\|$ 的 x_0 ，都会发生上述情况，因此原点是不稳定的。

例 3.40 考察系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

此系统的线性化为 $\dot{x}_1 = 2x_2, \dot{x}_2 = -2x_1$ ，其特征值为 $+2j, -2j$ ，这表明对该系统不能使用 **Lyapunov** 线性化方法判断稳定性。然而如

果取
$$V(x, t) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

求出其导数为

$$\dot{V}(x, t) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^4)$$

因为 $V(x)$ 都是正定的，所以原点不稳定。

定理 3.11.2（第二不稳定性定理）如果在原点的某个邻域 Ω 内，存在一个连续可微的具有无穷大上界的标量函数 $V(x, t)$ ，满足

- $V(0, t_0) = 0$ ，且 $V(x, t_0)$ 在任意接近于原点处可取正值；
- $\dot{V}(x, t) - \lambda V(x, t) \geq 0, \forall t \geq t_0, \forall x \in \Omega$ ；

其中 λ 是正常数，那么原点 $\mathbf{0}$ 于 t_0 时刻是不稳定的。

例 3.41 考查系统

$$\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 \sin^2 x_2 + 5x_1 x_2^2 \sin^2 x_1$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 \sin^2 x_2 + x_2 - 5x_1^2 x_2 \cos^2 x_1$$

取 $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ ，显然，它在任意接近于原点处可取正值，且

其导数为

$$\dot{V} = x_1^2 - x_2^2 + 5x_1^2 x_2^2 = 2V + 5x_1^2 x_2^2$$

满足定理条件，所以原点是不稳定的。

定理 3.11.3（第三不稳定性(Cetaev)定理）设 Ω 是原点的一个邻域，如果存在具有连续的一阶偏导数且在 Ω 内具有无穷大上界的标量函数 $V(x, t)$ 以及存在一个 Ω 的子区域 Ω_1 ，满足

- $V(x, t)$ 和 $\dot{V}(x, t)$ 在 Ω_1 内是正定的；
- 原点是 Ω_1 的一个边界点；
- 对所有的 $t \geq t_0$ 和 Ω_1 在 Ω 内的所有边界点，有 $V(x, t) = 0$ 。

那么平衡点 $\mathbf{0}$ 于 t_0 时刻是不稳定的。

例 3.42 考查系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^3\end{aligned}$$

取 $V = x_1 - \frac{x_2^2}{2}$ ，它的导数为：

$$\dot{V} = \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 - x_1^3 x_2$$

验证 V 和 \dot{V} ，可以知道原点是不稳定的。

习题

3.1 对下列系统分别找出平衡点，并且判定它们的稳定性，指出是否渐近稳定、全局稳定。

(1) $\dot{x} = -x^3 + \sin^4 x$

(2) $\dot{x} = (5 - x)^5$

(3) $\ddot{x} + \dot{x}^5 + x^7 = x^2 \sin^8 x \cos^2 3x$

(4) $\ddot{x} + (x-1)^4 \dot{x}^7 + x^5 = x^3 \sin^3 x$

(5) $\ddot{x} + (x-1)^2 \dot{x}^7 + x = \sin \frac{\pi x}{2}$

3.2 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \sin t$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \cos t$$

证明原点是指数稳定的。并且用 Matlab 画出轨线走向图。

3.3 证明系统

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

原点是渐近稳定的，是否为指数稳定？并且用 **Matlab** 画出轨线走向图。

3.4 考虑系统

$$\dot{x}_1 = h(t)x_2 - g(t)x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -h(t)x_1 - g(t)x_2^3$$

其中对于所有 $t \geq 0$ ， $h(t)$ 和 $g(t)$ 是有界连续可微函数，且 $g(t) \geq k > 0$ 。

- (1) 平衡点 $x=0$ 是否一致渐近稳定？
- (2) 平衡点 $x=0$ 是否指数稳定？
- (3) 平衡点 $x=0$ 是否全局一致渐近稳定？
- (4) 平衡点 $x=0$ 是否全局指数稳定？

3.5 证明定理 3.11.2

3.6 证明定理 3.11.3