

## 第六章 反馈线性化

反馈线性化是一种非线性控制设计方法,近年来引起了大量研究者的关注。这种方法的核心思想就是把一个非线性系统代数地转化为(全部或者部分)线性系统,以便可以用线性系统的技巧。反馈线性化和普通的线性化(雅可比线性化)的根本区别在于,反馈线性化并不是通过系统的逼近而是通过状态变换和反馈得到的。

### 6.1 反馈线性化及其标准形

通过消去一个非线性系统中的非线性部分,使闭环动态成为一个线性系统,或者说,消去非线性部分以得到一个期望的线性动态,是反馈线性化最基本的思想。这种思想可以简单地应用于一类被称为相伴形式或者能控标准型的非线性系统中。称一个系统有相伴形式,如果它的动态可以表示成

$$x^{(n)} = f(x) + b(x)u \quad (6.1)$$

当非线性系统不是一个能控标准型时,就必须在使用反馈线性化设计之前先通过代数变换把系统转化为能控标准型,或者依赖原系统的部分线性化。

下面分析一个反馈线性化的例子(控制水槽中的液面)

**例 6.1** 在下图 6.1 所示的流体系统中,液体储存于一个开口水槽内。 $h$  是液体表面距槽底的高度,  $A(h)$  是水槽的横截面积,它是  $h$  的函数。液体体积  $v = \int_0^h A(\lambda)d\lambda$ 。对于密度为  $\rho$  的液体,其绝

对压强为  $p = \rho gh + p_a$ ,  $p_a$  是大气压强 (假设为常数),  $g$  是重力加速度。液体流入水槽的流速为  $\omega_i$ , 通过阀门流出水槽的流速服从流压关系, 用  $\omega_o = k\sqrt{\Delta p}$  表示。在流动情况下,  $\Delta p = p - p_a$ 。取  $u = \omega_i$  作为控制输入,  $y = h$  作为输出。

- (a) 用  $h$  作为状态变量, 确定状态模型。
- (b) 用  $p - p_a$  作为状态变量, 确定状态模型。
- (c) 求保持输出为恒定值  $r$  所需的  $u_{ss}$

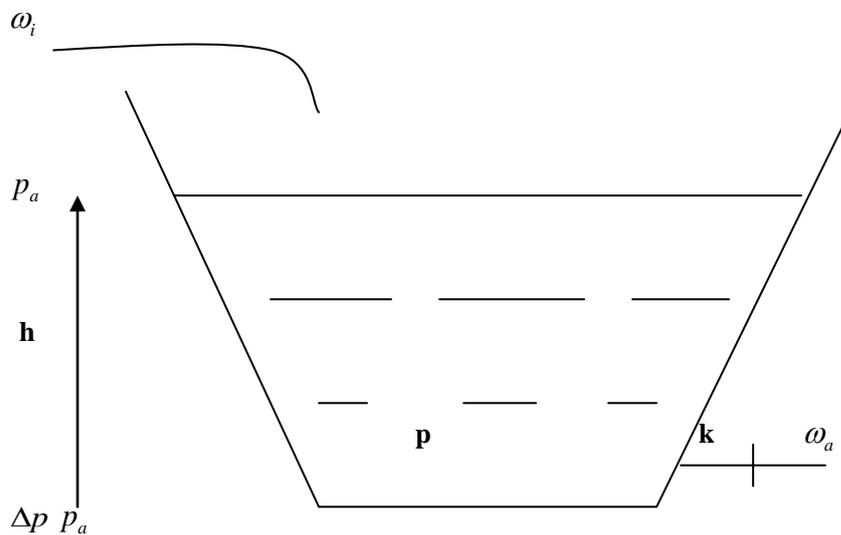


图 6.1 流体系统

(a)解 由输入变化量等于输出变化量得到等式

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^h A(\lambda) d\lambda \right) = \omega_i - k\sqrt{\rho gh}$$

$$A(h)\dot{h} = u - k\sqrt{\rho gh}$$

令  $x = h$

$$\dot{x} = \frac{1}{A(x)} [u - k\sqrt{\rho gh}], \quad y = x$$

(b) 解 令  $x = p - p_a = \rho gh$

$$\text{则有 } \dot{x} = \frac{\rho g}{A(x/\rho g)}(u - k\sqrt{x}), \quad y = x/(\rho g)$$

(c) 平衡点满足

$$0 = u_{ss} - k\sqrt{\rho g x_{ss}}, \quad y_{ss} = x_{ss} = r$$

$$\text{因此有, } u_{ss} = k\sqrt{\rho g r}$$

对上述系统进行反馈线性化技术过程

系统的动力学方程为:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^h A(\lambda) d\lambda \right) = \omega_i - k\sqrt{\rho g h}$$

$$A(h)\dot{h} = u - k\sqrt{\rho g h}$$

是一个非线性系统。如果选取

$$u(t) = k\sqrt{\rho g h} + A(h)v$$

其中,  $v$  是一个待定的“等价输入”, 得到的动态是线性的, 即

$$\dot{h} = v$$

选取  $v$  为

$$v = \dot{h}_d(t) - \alpha \tilde{h}$$

其中,  $\tilde{h} = h(t) - h_d$  为液面高度误差,  $\alpha$  为一正常数, 所得的闭环系统为

$$\dot{\tilde{h}} + \alpha \tilde{h} = 0$$

这表明当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{h}(t) \rightarrow 0$ 。实际的输入为

$$u(t) = k\sqrt{\rho g h} - A(h)\alpha \tilde{h}$$

例 6.2 双连杆机械手的反馈线性化分析

如下图 6.2 提供了一个双连杆机械手的物理模型，每个关节上安装了一个马达来提供转动力矩、一个编码器来测量关节位置，以及一个转速表来测量关节速度。控制设计的目标是让关节所在位置  $q_1$  和  $q_2$  按照机械手运动规划方案计划好的路径  $q_{d1}(t)$  和  $q_{d2}(t)$  运动。当指定机械手按照运动规划的路径（如画圆）运动时，跟踪控制问题就出现了。

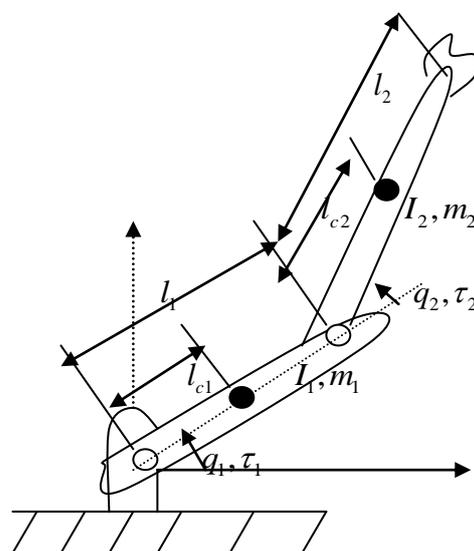


图 6.2 双连杆机械手

### 拉格朗日—欧拉法（Lagrange Euler method）

拉格朗日力学，是基于能量项对系统变量及时间微分的方法。

先介绍拉格朗日函数的定义

$$L = K - P \quad (6.2)$$

其中， $L$  是拉格朗日函数， $K$  是系统动能， $P$  是系统势能。

对于工业机器人，公式 (6.2) 中的  $K$  为操纵臂的总动能， $P$  是操纵臂的总势能。因而有拉格朗日—欧拉方程

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (6.3)$$

其中， $L$ 是拉格朗日函数， $\tau_i$ 为系统广义的力或力矩， $q_i$ 为系统变量， $\dot{q}_i$ 为系统变量的一阶导数， $i=1,2,\dots,n$

对于工业机器人， $\tau_i$ 为关节 $i$ 处作用于系统已驱动杆件 $i$ 的广义力或力矩， $q_i$ 为操纵臂的广义坐标， $\dot{q}_i$ 为操纵臂广义坐标的一阶导数。从式(6.3)可知，需选取一组能够方便而准确地描述系统的广义坐标。工业机器人个转动关节的转角、移动关节的位移可以通过电位计、编码器等传感器测量，因此工业机器人的广义坐标常常由于各转动关节转角和移动关节的位移了定义。

例 6.3 如下图 6.3 是两自由度双连杆系统，假设个连杆的质量集中于连杆的末端。为了计算两自由度双连杆的拉格朗日—欧拉运动方程，选取图中的转角 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 为系统的的广义坐标，并计算系统的动能和势能。

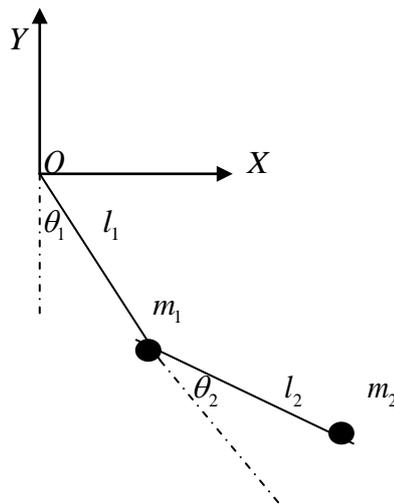


图 6.3 两自由度双连杆系统

解系统的总动能为 $m_1$ 和 $m_2$ 的动能之和

$$K = K_1 + K_2$$

其中， $K$  是系统的总动能； $K_1$  是  $m_1$  的动能； $K_2$  是  $m_2$  的动能。

$$m_1 \text{ 的动能为 } K_1 = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

为了计算  $m_2$  的动能，需要计算出  $m_2$  的速度。

$m_2$  的位置

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$m_2$  的速度

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{y}_2 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{cases}$$

$m_2$  的动能

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \end{aligned}$$

因而系统的总动能可表示为

$$K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

系统的总势能为  $m_1$  和  $m_2$  的势能之和（转动轴  $O$  点为零势能线），

即

$$P = P_1 + P_2$$

为  $m_1$  的势能

$$P_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1$$

为  $m_2$  的势能

$$P_2 = -m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

因而系统的总势能为

$$P = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2 gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

由 (6.2) 计算双连杆系统的广义力或力矩  $T_1, T_2$

对广义坐标  $\theta_1$ , 有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = [(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)gl \sin \theta_1 - m_2 gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

因此

$$T_1 = [(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2)gl \sin \theta_1 + m_2 gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

对广义坐标  $\theta_2$ , 有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - m_2 gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

因此

$$T_2 = (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

将  $T_1, T_2$  所示方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos \theta_2 & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2 \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1l_2 \sin \theta_2 \\ m_2l_1l_2 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2 \sin \theta_2 & -m_2l_1l_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 + m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

简洁地表示为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

取  $\tau = H(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + g$

这里  $v = \ddot{q}_d - 2\lambda\dot{\tilde{q}} - \lambda^2\tilde{q}$

其中,  $v$  为等价输入,  $\tilde{q} = q - q_d$  为位置跟踪误差,  $\lambda$  为一个正数。跟踪误差  $\tilde{q} = q - q_d$  满足方程

$$\ddot{\tilde{q}} + 2\lambda\dot{\tilde{q}} + \lambda^2\tilde{q} = 0$$

## 6.2 输入-状态线性化

考查形如

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.4)$$

的单输入非线性系统的控制输入  $u$  的设计问题。用输入-状态线性化解决这个问题需要两个步骤: 第一步, 找到一个状态变换  $z = z(x)$  和一个输入变换  $u = u(x, v)$ , 以使得非线性系统转化为一个等价的线性定常系统, 及熟知的形式  $\dot{z} = Az + bv$ ; 第二步, 利用标准线性化技巧 (如极点配置) 取设计  $v$ 。

例 6.4 考查例子

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos(2x_1)\end{aligned}$$

即使线性控制设计能使该系统在平衡点  $(0,0)$  附近的一个小邻域内稳定, 要找个控制器使系统在一个大的区域内稳定也不是一件简单的事情。一个具体的困难就是控制输入  $u = u(x, v)$  不能直接消去第一个方程中的非线性部分。

然而, 假设考虑一组新的状态变量

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= ax_2 + \sin x_1\end{aligned}$$

其逆变换为

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \frac{1}{a}(z_2 - \sin z_1)\end{aligned}$$

则新的状态方程变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1)\end{aligned}$$

即可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z_1 + z_2 \\ -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \cos(2z_1) \end{bmatrix} u$$

注意,  $(0,0)$  仍然是新状态方程的平衡点。现在, 非线性部分就可以被如下的控制规律消掉

$$\text{令 } a \cos(2z_1) \cdot u = 2z_1 \cos z_1 - \cos z_1 \sin z_1 + v$$

得到控制律及线性化方程

$$u = \frac{2z_1 \cos z_1 - \cos z_1 \sin z_1 + v}{a \cos(2z_1)}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases}$$

取

$$v = -kz = -(k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由稳定性定理得：

$$k_1 + 2k_2 \geq 0$$

将

$$v = -kz = -(k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

带入  $u = \frac{2z_1 \cos z_1 - \cos z_1 \sin z_1 + v}{a \cos(2z_1)}$

同时根据  $\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = ax_2 + \sin x_1 \end{cases}$

可得到：

$$u = \frac{2x_1 \cos x_1 - \cos x_1 \sin x_1 - k_1 x_1 - k_2 (ax_2 + \sin x_1)}{a \cos(2x_1)}$$

所以原系统可化为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + \frac{1}{a}(2x_1 \cos x_1 - \cos x_1 \sin x_1 - k_1 x_1 - k_2 z_2) \end{cases}$$

$a$  取值为 1,  $k_1$  取值为 3 和  $k_2$  取值为 -1 得到

$$u = \frac{1}{a \cos(2z_1)} (v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1)$$

得到线性输入状态关系

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

取  $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$  配极点

如取  $v = -2z_2$  得稳定的闭环为

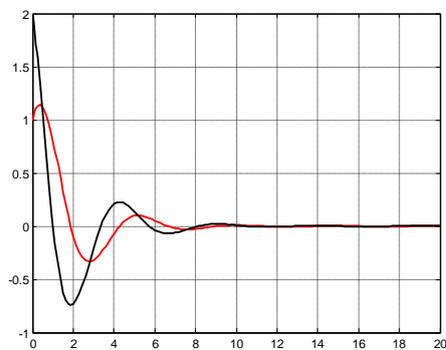
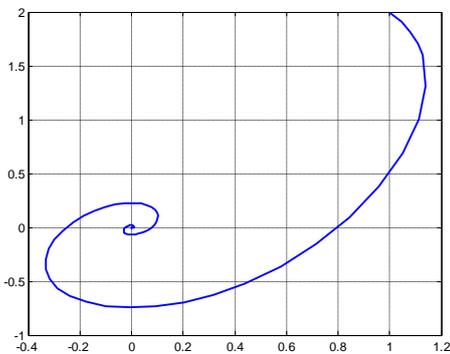
$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = -2z_2$$

所以原系统可化为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + \frac{1}{a}(2x_1 \cos x_1 - \cos x_1 \sin x_1 - k_1 x_1 - k_2 z_2) \end{cases}$$

原系统的轨线仿真图如下



仿真程序:

```

function dx=fiss1(t,x)
dx=zeros(2,1);
dx(1)=-2*x(1)+x(2)+sin(x(1));
dx(2)=-x(2)*cos(x(1))+(2*x(1)*cos(x(1))-cos(x(1))*sin(x(1)))-3*x(1)+1*x(2);
end
[t,x]=ode45('fiss1',[0 20],[1 2]);
figure(1)
plot(x(:,1),x(:,2),'linewidth',2);
grid on
figure(2)
plot(t,x(:,1),'r','linewidth',2);
hold on;
plot(t,x(:,2),'k','linewidth',2);
grid on

```

针对上面所述，要解决的问题：1、那些类型的非线性系统可以转变成线性系统？2、对可以线性化的非线性系统如何找出适当的变换？

## 6.3 数学工具

### 6.3.1 向量场的李代数结构

考查状态  $x$  的一个光滑标量函数  $h(x)$ ，记  $h(x)$  的梯度为

$\Delta h$

$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.5)$$

梯度是一个行向量且第  $j$  个元为  $(\Delta h)_j = \partial h / \partial x_j$ 。考查一个向

量场  $f(x)$ ，记  $f$  的雅克比矩阵为  $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}$  这是一个  $n \times n$  矩阵且

$$(\Delta f)_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$$

**函数的李导数** 设  $\lambda$  是定义在流形  $N$  上的一个光滑实值函数，即  $\lambda \in C^\infty(N)$ ， $f$  是  $N$  上的一个光滑向量场。函数  $\lambda$  沿向量

场  $f$  方向的李导数是映射

$$L_f : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(N) \quad (6.6)$$

$$L_f \lambda(p) = (f(p))(\lambda) \quad p \in U \subset N$$

的结果。如果流形  $N = R^n$ ，则函数  $\lambda$  沿某向量场  $f$  方向的李导数可具体表示为

$$L_f \lambda(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} (\lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f \quad (6.7)$$

把上述李导数定义记为  $\langle d\lambda, f \rangle$

**例 6.5** 考虑受控方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

$$y = x_1$$

解: 设

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix}, \lambda(x) = x_1$$

则有

$$L_f \lambda(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

**例 6.6** 考虑下面受控方程

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u$$

$$y = x_1$$

解: 设

$$f = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \lambda(x) = x_1$$

则有

$$L_f \lambda(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1$$

**高阶李导数** 函数的高阶李导数由以下递推形式定义

$$k \text{ 阶李导数为 } L_f^k \lambda = L_f(L_f^{k-1} \lambda)$$

$$L_g L_f^{k-1} \lambda = L_g(L_f^{k-1} \lambda)$$

约定：零阶李导数为

$$L_f^0 \lambda = \lambda$$

**例 6.7** 考虑受控方程二阶李导数

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

$$y = x_1$$

**解 设**

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix}, \lambda(x) = x_1$$

则有

$$L_f \lambda(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_f^2 \lambda(x) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2$$

**例 6.8** 考虑受控方程二阶李导数

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u$$

$$y = x_1$$

解 设

$$f = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \lambda(x) = x_1$$

则有

$$L_f \lambda(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1$$

$$L_f^2 \lambda(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1$$

### 6.3.2 李积或李括号

李积或李括号是一个映射

$$[*,*]: V \times V \rightarrow V$$

$$([f, g](p))(\lambda) = (L_f L_g \lambda)(p) - (L_g L_f \lambda)(p) \quad \forall f, g \in \mathcal{V}(\mathbf{N}) \quad p \in U \subset \mathbf{N}$$

或简写为

$$[f, g]\lambda = L_f L_g \lambda - L_g L_f \lambda \quad (6.8)$$

李积的计算公式

$$[f, g]\lambda = L_f L_g \lambda - L_g L_f \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \left( \frac{\partial g}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} g \right) \quad (6.9)$$

例 6.9 设系统  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

其中

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ -x_2 \cos x_1 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2x_1) \end{bmatrix}$$

它们的李括号为

$$\begin{aligned}
[f, g] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\sin(2x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ -x_2 \cos x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 + \cos x_1 & a \\ x_2 \sin x_1 & -\cos x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2x_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a \cos(2x_1) \\ \cos x_1 \cos(2x_1) - 2\sin(2x_1)(-2x_1 + ax_2 + \sin x_1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 李括号性质

- (1) 双线线性
- (2) 反对称性
- (3) 雅可比恒等式

$$L_{ad_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h \quad (6.10)$$

### 6.3.3 微分同胚和状态变换

定义：映射  $\phi: R^n \rightarrow R^n$ ，定义域是  $\Omega$ ，如果  $\phi: R^n \rightarrow R^n$  是光滑的并且  $\phi^{-1}$  存在且光滑，则称  $\phi: R^n \rightarrow R^n$  为微分同胚。

引理：微分同胚存在的条件。光滑映射  $\phi: R^n \rightarrow R^n$ ，如果其雅可比矩阵在一个点  $x = x_0$  上是非奇异的，则  $\phi: R^n \rightarrow R^n$  是定义在  $\Omega$  中  $x_0$  的一个领域上的局部微分同胚。

**例 6.10** 一个非全微分同胚。设非线性向量方程

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \phi(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 5x_1x_2^2 \\ 3\sin x_2 \end{bmatrix}$$

对所有的  $x_1$  和  $x_2$  都有定义。它的雅可比矩阵

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2 + 5x_2^2 & 10x_1x_2 \\ 0 & 3\cos x_2 \end{bmatrix}$$

在原点  $x = (0, 0)$  的秩为 2

定义域为

$$\Omega = \{(x_1, x_2), |x_2| < \pi/2\}$$

**定理 6.3.1** (弗罗贝尼乌斯定理) 设  $f_1, f_2, \dots, f_m$  为一组线性无关的向量场集合, 当且仅当这个集合是对合时, 它是完全可积的。

完全可积 一阶偏微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

其中,  $f_i$  和  $g_i$  是已知的标量函数, 而  $h$  是未知函数。显然, 这组偏微分方程被向量  $f = [f_1, f_2, f_3]^T, g = [g_1, g_2, g_3]^T$  唯一定义好了。如果上述方程组的解  $h$  存在, 则称向量场  $\{f, g\}$  是完全能积。

定义  $R^n$  中的一组线性无关的向量场  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  称为完全能积, 当且仅当存在  $n-m$  个标量函数  $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-m}(x)$  满足下列偏微分方程

$$\nabla h_i f_i = 0 \quad (6.12)$$

定义  $R^n$  中的一组线性无关的向量场  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  称为对合 当且仅当存在标量函数  $\alpha_{ijk} : R^n \rightarrow R$  使得下列等式成立

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} f_k(x) \quad \forall i, j \quad (6.13)$$

**例 6.11** 考查偏微分方程组

$$4x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$$

$$-x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (x_3^2 - 3x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 2x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$$

相关向量场  $\{f_1, f_2\}$ ，其中

$$f_1 = [4x_3 \quad -1 \quad 0]^T \quad f_2 = [-x_1 \quad (x_3^2 - 3x_2) \quad 2x_3]^T$$

为了判断这个方程组是否有解，只要检验  $\{f_1, f_2\}$  是否对合。

由计算得

$$[f_1, f_2] = [-12x_3 \quad 3 \quad 0]^T$$

并且有  $[f_1, f_2] = -3f_1 + 0f_2$

## 6.4 单输入系统的输入-状态线性化

本节讨论单输入非线性系统的输入-状态线性化问题，设系统的状态方程为（仿射系统）

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6.14)$$

其中， $f$  和  $g$  是光滑向量场。需要研究的是这个系统何时能由状态和输入变换线性化，怎样找到这样的变换，以及怎样基于这样的反馈线性化设计控制器。

### 6.4.1 输入-状态线性化的定义

**定义 6.4.1** 称仿射系统的单输入非线性系统是可输入-状态线性化的，其中  $f$  和  $g$  是  $R^n$  上的光滑向量场，如果存在  $R^n$  中的一个区域  $\Omega$ ，一个微分同胚  $\Phi(x): \Omega \rightarrow R^n$ ，及一个非线性反馈控制规律

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (6.15)$$

使得新的状态变量  $z = \Phi(x)$  及新的输入  $v$  满足线性定常关系

$$\dot{z} = Az + bv \quad (6.16)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

称新状态  $z$  为线性化状态，称控制规律为线性化控制规律

**引理 6.4.1** 一个  $n$  阶非线性系统可以输入-状态线性化，当且仅当存在一个标量函数  $z_1(x)$  使得系统以  $z_1(x)$  为输出的输入-输出线性化，且具有相对阶  $n$

#### 6.4.2 输入-状态线性化的条件

**定理 6.4.1** 设  $f$  和  $g$  是  $R^n$  上的光滑向量场，非线性系统是可输入-状态线性化的，当且仅当存在一个区域  $\Omega$  使得下列条件成立：

向量场  $\{g, ad_f g, \cdots, ad_f^{n-1} g\}$  在  $\Omega$  上线性无关；

集合  $\{g, ad_f g, \cdots, ad_f^{n-2} g\}$  在  $\Omega$  上对合。

**引理 6.4** 设  $z(x)$  是区域  $\Omega$  上的光滑函数，则在区域  $\Omega$  上，方程组

$$L_g z = L_g L_f z = \cdots = L_g L_f^k z = 0 \quad (6.17)$$

等价于

$$L_g z = L_{ad_f g} z = \cdots = L_{ad_f^k g} z = 0 \quad (6.18)$$

**证明** 先证明 (6.17) 式包含 (6.18) 式

当  $k=0$  时, 结论成立

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } L_{ad_f g} z = L_f L_g z - L_g L_f z = 0 - 0 = 0$$

当  $k=2$  时

$$L_{ad_{f^2} g} z = L_f^2 L_g z - 2L_f L_g L_f z + L_g L_f^2 z = 0 - 0 + 0 = 0$$

定理 6.4.1 的证明: 先证必要性。假设存在状态变换  $z = z(x)$  和输入变换  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , 使得  $z$  和  $v$  满足 (6.4.2) 的第一行, 得到

$$\dot{z}_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} (f + gu) = z_2 \quad (6.19)$$

同理, 对  $z = z(x)$  的其它分量可以得到一组偏微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} f + \frac{\partial z_1}{\partial x} gu &= z_2 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} f + \frac{\partial z_2}{\partial x} gu &= z_3 \\ \dots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x} f + \frac{\partial z_n}{\partial x} gu &= z_v \end{aligned} \quad (6.20)$$

因为  $z_1, \dots, z_n$  不依赖于  $u$ , 而  $v$  依赖于  $u$ , 由上面的方程组可推出

$$\begin{aligned} L_g z_1 = L_g z_2 = \dots = L_g z_{n-1} &= 0 & L_g z_n &\neq 0 \\ L_f z_i &= z_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

将上面关于  $z_i$  的方程用一个仅含  $z_1$  的约束方程组代替, 由引理其包含了  $\nabla_{z_1} ad_f^k g = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$

从而可以得到

$$\nabla_{z_1} ad_f^{n-1} g = (-1)^{n-1} L_g z_n \quad (6.21)$$

这意味着

$$\nabla_{z_1} ad_f^{n-1} g \neq 0 \quad (6.22)$$

推出向量场  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  线性无关

充分性证明 由弗洛贝尼乌斯定理存在一个非零标量函数  $z_1(x)$  满足

$$L_g z_1 = L_{ad_f g} z_1 = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} z_1 = 0 \quad (6.23)$$

由引理 6.4.1, 上面的方程能写成

$$L_g z_1 = L_g L_f z_1 = \dots = L_g L_f^{n-2} z_1 = 0 \quad (6.24)$$

这意味着如果用  $z = [z_1, L_f z_1, \dots, L_f^{n-1} z_1]^T$  作为一组新状态变量,

前  $n-1$  个状态方程有  $\dot{z}_k = z_{k+1} \quad k = 1, \dots, n-1$

最后一个状态方程为

$$\dot{z}_n = L_f^n z_1 + L_g L_f^{n-1} z_1 u \quad (6.25)$$

令  $u = (-L_f^n z_1 + v) / (L_g L_f^{n-1} z_1)$

故有

$$\dot{z}_n = v \quad (6.26)$$

### 6.4.3 线性化步骤

- (1) 对给定系统构造向量场  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$ ;
- (2) 检验是否满足能控条件和对合条件;
- (3) 如果两个条件都满足, 从方程 (6.19) 得到第一个状态  $z_1$

$$\nabla_{z_1} ad_f^k g = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$\nabla_{z_1} ad_f^{n-1} g \neq 0$$

(4) 计算状态变换  $z(x) = [z_1, L_f z_1, \dots, L_f^{n-1} z_1]^T$  和输入变换  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ ,

其中

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1}$$

例 6.12 考查下图 6.4 中机械装置的控制，在垂直平面上，该机械装置是一个通过扭转的弹簧由马达驱使的连杆（一个单连杆柔性关节机器人），其运动方程是

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned}$$

考查其输入-状态线性化。

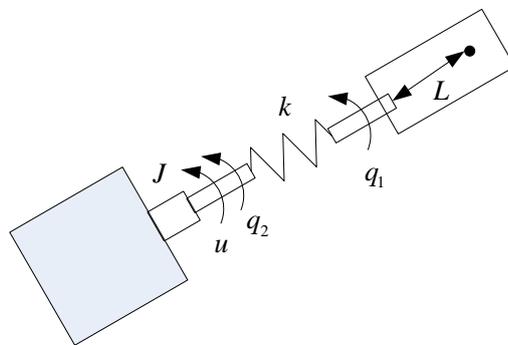


图 6.4 单连杆柔性关节机器人

第一步，用状态空间表示系统方程。选择状态向量为

$$x = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]^T$$

相应的向量场  $f$  和  $g$  可以写成

$$f = \left[ x_2 \quad -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \quad x_4 \quad \frac{k}{J} (x_1 - x_3) \right]^T$$

$$g = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{J} \right]^T$$

第二步， 检验能控条件和对合条件。计算得

$$(g \quad ad_f g \quad ad_f^2 g \quad ad_f^3 g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

其中，当  $k > 0$ ,  $IJ < \infty$  时，矩阵的秩为 4。而且，由于  $(g \quad ad_f g \quad ad_f^2 g \quad ad_f^3 g)$  是常数，因而是对合的。所以是可输入-状态线性化的。

第三步，找出状态变换  $z = z(x)$  和输入变换  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  来实现输入-状态线性化，新状态  $z$  的第一个分量  $z_1$  必须满足

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_4} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0$$

于是  $z_1$  只是  $x_1$  的函数，上述方程组最简单的解是

$$z_1 = x_1$$

其他的状态分量可以由  $z_1$  得到

$$z_2 = \nabla_{z_1} f = x_2$$

$$z_3 = \nabla_{z_2} f = -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3)$$

$$z_4 = \nabla_{z_3} f = -\frac{MgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I} (x_2 - x_4)$$

因此，输入变换

$$u = (v - \nabla_{z_4} f) / (\nabla_{z_4} g)$$

即可明确地写为

$$u = \frac{IJ}{k} (v - a(x))$$

其中,

$$a(x) = \frac{MgL}{I} \sin x_1 (x_2^2 + \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I}) + \frac{k}{I} (x_1 - x_3) (\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I} \cos x_1)$$

由上述状态变换和输入变换得到下列线性方程组

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = v$$

注 上述变换可逆

$$x_1 = z_1$$

$$x_2 = z_2$$

$$x_3 = z_1 + \frac{I}{k} (z_3 + \frac{MgL}{I} \sin z_1)$$

$$x_4 = z_1 + \frac{I}{k} (z_2 + \frac{MgL}{I} z_2 \cos z_1)$$

例 6.13 直流电机的动力学方程为:

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

$$v_a = c_1 i_f \omega + L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_2 i_f i_a - c_3 \omega$$

第一个是励磁回路的方程， $v_f, i_f, R_f, L_f$  分别是电压、电流、电阻和电感。电枢回路由第二个方程描述，相应的变量为  $v_a, i_a, R_a, L_a$ 。第三个方程是轴的力矩方程， $J$  是电机的惯性， $c_3$  是阻尼系数， $c_1 i_f \omega$  是电枢回路产生的反电动势， $c_2 i_f i_a$  是电枢电流与励磁电路磁通的相互作用产生的力矩。

作变量假设后可以表示为三阶模型  $\dot{x} = f(x) + gu$  表示的场控直流电机，式中

$$f(x) = \begin{bmatrix} -ax_1 \\ -bx_2 + k - cx_1x_3 \\ \theta x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a, b, c, \theta$  和  $k$  是正常数。已知以  $y = x_3$  作为输出时，系统的相对阶为 2，因此是部分可反馈线性化的。下面研究状态方程能否完全线性化。我们有

$$ad_f g = [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = -\frac{\partial f}{\partial x} g = -\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ -cx_3 & -b & -cx_1 \\ \theta x_2 & \theta x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ cx_3 \\ -\theta x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
ad_f^2 g &= [f, ad_f g] = \frac{\partial(ad_f g)}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f g \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ax_1 \\ -bx_2 + k - cx_1 x_3 \\ \theta x_1 x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ -cx_3 & -b & -cx_1 \\ \theta x_2 & \theta x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ cx_3 \\ -\theta x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ c\theta x_1 x_2 \\ \theta(bx_2 - k + cx_1 x_3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a^2 \\ -acx_3 - bcx_3 + c\theta x_1 x_2 \\ a\theta x_2 + c\theta x_1 x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 \\ (a+b)cx_3 \\ (b-a)\theta x_2 - \theta k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{矩阵 } G = [g, ad_f g, ad_f^2 g] = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & cx_3 & (a+b)cx_3 \\ 0 & -\theta x_2 & (b-a)\theta x_2 - \theta k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det G &= |g, ad_f g, ad_f^2 g| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & cx_3 & (a+b)cx_3 \\ 0 & -\theta x_2 & (b-a)\theta x_2 - \theta k \end{vmatrix} \\
&= cx_3((b-a)\theta x_2 - \theta k) + \theta x_2((a+b)cx_3) = c\theta(-k + 2bx_2)x_3
\end{aligned}$$

因此，当  $x_2 \neq k/2b$ ， $x_3 \neq 0$  时， $G$  的秩为 3。如果  $[g, ad_f g] \in D$ ，

则分布  $D = \text{span}\{g, ad_f g\}$  是对合的。有

$$[g, ad_f g] = \frac{\partial ad_f g}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此， $D$  是对合的，所以在定义域

$$D_0 = \{x \in R^3 \mid x_2 > \frac{k}{2b}, x_3 > 0\}$$

内系统可以反馈线性化。

无激励系统在  $x_1 = 0$  和  $x_2 = \frac{k}{b}$  有一个平衡点集合。取理想工作点为

$x^* = [0, k/b, \omega_0]^T$ ，这里  $\omega_0$  是角速度  $x_3$  的理想设定点。我们希望找到满足

到满足

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x} g \neq 0 \text{ 的 } h(x), \text{ 且 } h(x^*) = 0。$$

根据条件

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = \frac{\partial h}{\partial x_1} = 0$$

可知  $h$  一定与  $x_1$  无关，因此

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_2} [-bx_2 + k - cx_1 x_3] + \frac{\partial h}{\partial x_3} \theta x_1 x_2$$

又根据  $[\partial(L_f h)/\partial x]g = 0$  推出，如果

$$h = c_1[\theta x_2^2 + cx_3^2] + c_2 c_1 \text{ 和 } c_2 \text{ 为常数，则 } cx_3 \frac{\partial h}{\partial x_2} = \theta x_2 \frac{\partial h}{\partial x_3} \text{ 成立。选择}$$

$c_1 = 1$ ，并为满足条件  $h(x^*) = 0$ ，取

$$c_2 = -\theta(x_2^*)^2 - c(x_3^*)^2 = -\theta(k/b)^2 - c\omega_0^2$$

如此选择  $h$ ，则  $L_f h$  和  $L_f^2 h$  为

$$L_f h(x) = 2\theta x_2 (k - bx_2), \quad L_f^2 h(x) = 2\theta(k - 2bx_2)(-bx_2 + k - cx_1 x_3)$$

$$\text{因此} \quad \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x} g = \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_1} = -2c\theta(k - 2bx_2)x_3$$

而且只要  $x_2 \neq k/2b$ ， $x_3 \neq 0$ ，条件  $[\partial(L_f h)/\partial x]g \neq 0$  就成立。假设

$x_3^* > 0$ ，容易验证映射  $z = T(x)$  是  $D_0$  上的微分同胚映射，且状态

方程在  $z$  坐标系中有明确定义，定义域为

$$D_z = T(D_0) = \{z \in R^3 \mid z_1 > \theta\phi^2(z_2) - \theta\phi(k/b)^2 - c\omega_0^2, z_2 < \frac{\theta k^2}{2b}\}$$

这里  $\phi(\cdot)$  是映射  $2\theta x_2(k - bx_2)$  的逆映射，当  $x_2 > k/2b$  时有定义。

定义域  $D_z$  包含原点  $z = 0$ 。

进行变量代换

$$z_1 = h(x) = \theta x_2^2 + cx_3^2 - \theta(k/b)^2 - c\omega_0^2$$

$$z_2 = L_f h(x) = 2\theta x_2(k - bx_2)$$

$$z_3 = L_f^2 h(x) = 2\theta(k - 2bx_2)(-bx_2 + k - cx_1x_3)$$

控制率为  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$

$$\text{其中 } \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} = \frac{1}{-2\theta k cx_3 + 4\theta bc x_2 x_3}$$

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -\frac{L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} \\ &= -\frac{(-4abc\theta - 12\theta b^2 c)x_1 x_2 x_3 + (2ac\theta k + 10bck\theta)x_1 x_3 + 14\theta b^2 k x_2}{-2\theta k cx_3 + 4\theta bc x_2 x_3} \\ &\quad - \frac{-4\theta bc^2 x_1^2 x_3^2 + 4\theta^2 bc x_1^2 x_2^2 - 2\theta^2 k x_1^2 x_2 - 8\theta b^3 x_2^2 - 6\theta bk^2}{-2\theta k cx_3 + 4\theta bc x_2 x_3} \end{aligned}$$

令  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $\theta=1$ ,  $w_0=1$  和  $k=1$

$$z_1 = h(x) = \theta x_2^2 + cx_3^2 - \theta(k/b)^2 - c\omega_0^2 = x_2^2 + x_3^2 - 2$$

$$z_2 = L_f h(x) = 2\theta x_2(k - bx_2) = 2x_2(1 - x_2)$$

$$z_3 = L_f^2 h(x) = 2\theta(k - 2bx_2)(-bx_2 + k - cx_1x_3) = 2(1 - 2x_2)(-x_2 + 1 - x_1x_3)$$

$$\begin{aligned} v &= -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &= -k_1(x_2^2 + x_3^2 - 2) - 2k_2 x_2(1 - x_2) - 2k_3(1 - 2x_2)(-x_2 + 1 - x_1x_3) \end{aligned}$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} = \frac{-16x_1 x_2 x_3 + 12x_1 x_3 + 14x_2 - 4x_1^2 x_3^2 + 4x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2 - 8x_2^2 - 6}{2x_3 - 4x_2 x_3}$$

## 6.5 输入-输出线性化

先考虑跟踪控制问题，考查系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (6.27)$$

假定我们的目标是要使得输出  $y(t)$  跟踪一个期望轨线  $y_d(t)$ ，并且保持整个状态有界，这里的  $y_d(t)$  及其对时间的足够高阶导数都是已知且有界。此模型的一个明显困难是输出  $y(t)$  只是通过状态变量和非线性方程间接地依赖于输入  $u$ ，因此，要想找到合适的输入  $u$  来控制输出  $y(t)$  的跟踪性能并不容易。但是如果能找到系统输出  $y(t)$  与控制输入  $u$  之间的一个简单而直接的关系，则跟踪控制的设计难度就降低了。这些思想构成了非线性控制设计中的所谓输入-输出线性化方法的直观基础。如考查三级系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (6.28)$$

为了得到  $y$  和  $u$  之间的直接关系，对  $y$  求导，可得到

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \quad (6.29)$$

由于  $\dot{y}$  与  $u$  没有直接关系，再次对  $y$  微分，可得

$$\ddot{y} = (x_2 + 1)u + f_1(x) \quad (6.30)$$

其中,  $f_1(x)$  是状态函数, 它由

$$f_1(x) = (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2 + 1)x_1^2 \quad (6.31)$$

确定, 很显然, 假如选取如下形式的控制输入

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}(v - f_1) \quad (6.32)$$

得到

$$\ddot{y} = v \quad (6.33)$$

令  $e = y(t) - y_d(t)$  是跟踪误差, 选择新输入  $v$  为

$$v = \ddot{y}_d - k_1 e - k_2 \dot{e} \quad (6.34)$$

闭环系统跟踪误差由

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 \quad (6.35)$$

注意:

除了奇点  $x_2 = -1$  外, 控制规律是处处可定义的

在实现控制规律时全状态量测是必须的, 因导数及输入的计算都需要  $x$  的值

上述控制设计策略首先产生一个线性的输入-输出关系, 然后基于线性控制用公式表示控制器, 这被称为输入-输出线性化。

**6.5.1 相对阶定义** 如果系统需要微分  $r$  次来产生输出  $y$  和输入  $u$  之间的明显关系, 这个系统被称为具有相对阶  $r$ 。

上面的例子是一个具有相对阶 2 阶的系统。我们要指出, 这个术语和线性系统中的概念是一致的 (极点超过零点)。我们

将证明任何  $n$  阶能控系统，对任何输出最多微分  $n$  次，输入必定会出现，即  $r \leq n$ 。这可以直观理解为：假如需要微分的次数超过  $n$ ，系统的阶数将会超过  $n$ ；假如控制输入不出现，则系统是不能控的。

式子 (6.35) 仅依赖闭环系统的一部分，因为它是二阶的，而整个动态系统是三阶的。因此，系统的这部分是输入-输出线性化中“不能观部分”，系统的这部分被称为内动态，因为它不能从外部的输入-输出关系 (6.30) 观测出。

**6.5.2 内动态** 系统中输入-输出线性化中“不能观部分”称为系统的内动态，因为它不能从外部的输入-输出关系观测出。

上述例子中，可以把  $x_3$  作为内动态，内动态方程可表示为

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + \frac{1}{x_2 + 1} (\ddot{y}_d(t) - k_1 e - k_2 \dot{e} + f_1) \quad (6.36)$$

如果这个内动态是稳定的，我们的跟踪问题实际上已经解决了。否则，上述跟踪控制器在实际中是毫无意义的，因为内动态的不稳定暗示了会出现不希望的现象，比如保险丝烧断和激情部件激烈振动。因此，上述控制设计的实用性依赖于降阶系统和内动态的稳定性。

下面给出一些简单的例子，其中一些系统的内动态是稳定的（原先的设计方法是可用的），另一些系统的内动态是不稳定的（需重新设计）

#### 例 6.14 内动态

考查非线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ u \end{bmatrix},$$

$$y = x_1$$

微分  $y$  即得到第一个状态方程  $\dot{y} = x_1 = x_2^3 + u$ ，于是选择控制规律

$$u = -x_2^3 - e(t) + \dot{y}_d(t)$$

对第二个系统方程使用相同的控制规律，得到内动态

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e$$

是非自治和非线性的。但是，由于  $e$  有界，且  $y_d$  是假定有界的，有  $|\dot{y}_d(t) - e| \leq D$

### 6.5.3 线性系统的内动态

线性系统的内动态一般来说，因为内动态是非自治的且与“外部”闭环系统耦合，所以要直接判断它的稳定性是十分困难的，尽管 Lyapunov 分析对一些系统是有用的，但是，就像前面看到的，由于寻找 Lyapunov 函数比较困难，所以这种方法的广泛应用受到限制。因此，自然想找到一种简单的方法来判断内动态的稳定性。把内动态的概念转变成更熟悉的线性系统的形式有利于达到这个目的。

**例 6.15** 考查既能控又能观的线性系统的内动态

设二阶系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + u \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

对输出微分一次，得到第一个状态方程

$$\dot{y} = x_2 + u$$

显含  $u$ ，因此，控制规律选为

$$u = -x_2 + \dot{y}_d - (y - y_d)$$

得到跟踪误差方程

$$\dot{e} + e = 0$$

而内动态方程为

$$\dot{x}_2 + x_2 = \dot{y}_d - e(t)$$

### 例 6.16 飞机升降动态方程

图 6.5 是飞机的动力学图。作用于机翼和机身的升力之和等于  $L_w$ ，且作用在“升力中心”  $C_L$  上。升力中心点和质心  $C_G$  不一定重合（正数  $d$  代表质心和升力中心之间的距离）。飞机质量记为  $m$ ，它关于  $C_G$  的惯性力矩记为  $J$ 。假定所有的角度都足够小以至于可以线性化，并且飞机的前进速度基本保持恒定。

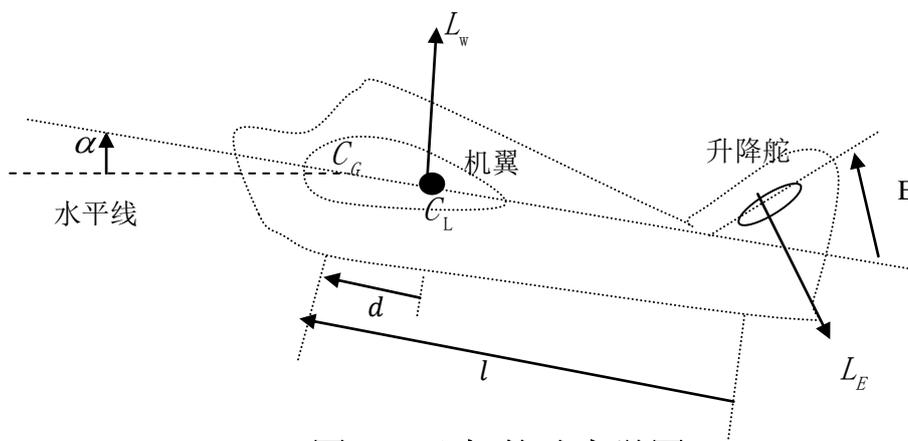


图 6.5 飞机的动力学图

飞机开始在恒定高度  $h = h_0$  飞行。为了垂直运动，升降舵（位

于机尾表面的一小块) 旋转一个角度  $E$ 。这对升降舵产生一个气动力  $L_E$ ，并对  $C_G$  产生一个转力矩。这个转力矩使得飞机以  $C_G$  为中心产生旋转，角度为  $\alpha$ 。作用于机翼上的升力  $L_w$  与  $\alpha$  成比例，即  $L_w = C_{ZW}\alpha$ 。同样， $L_E$  与水平面和升降舵之间的夹角成比例，即  $L_E = C_{ZE}(E - \alpha)$ 。而且，不同的空气阻力产生的摩擦力矩与  $\dot{\alpha}$  成比例，形式为  $b\dot{\alpha}$ ，总之，飞机垂直运动的简化模型可写为

$$J\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + (C_{ZE}l + C_{ZW}d)\alpha = C_{ZE}lE$$

$$m\ddot{h} = (C_{ZE} + C_{ZW})\alpha - C_{ZE}E$$

第一个式子代表力矩的平衡，第二个式子代表力平衡。

定义状态向量  $x = [\alpha, \dot{\alpha}, h, \dot{h}]$ ，得到运动方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -4x_2 - 4x_1 + 3E$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = 6x_1 - E$$

我们感兴趣的输出是飞机的高度

$$y = x_3$$

微分  $y$  直到输入  $E$  出现，得到

$$\ddot{y} = \ddot{x}_3 = \dot{x}_4 = 6x_1 - E$$

相对阶是二，选取  $E$  的一个极点配置控制规律

$$E = 6x_1 - \ddot{y}_d + \dot{\tilde{y}} + \tilde{y} \text{ 则有}$$

$$\ddot{\tilde{y}} + \dot{\tilde{y}} + \tilde{y} = 0$$

相应的内动态为

$$\dot{x}_2 = -4x_2 - 4x_1 + 3(6x_1 - \ddot{y}_d + \dot{\tilde{y}} + \tilde{y})$$

#### 6.5.4 内动态不稳定。

##### 零动态

线性系统内动态的稳定性仅取决于零点的位置，这种关系能否推广到非线性系统？为此首先需把零点的概念推广到非线性系统，然后再确定内动态的稳定性和已推广的零点之间的关系。

**零动态** 通过控制输入时输出恒为零，这时系统的内动态即为零动态。

##### 例 6.17 考虑系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

假定控制目标是使  $y$  跟踪  $y_d(t)$ ，微分  $y$  即得到第一个状态方程，于是选择控制率

$$u = -x_2^3 - e(t) + \dot{y}_d(t)$$

可保证  $e$  指数收敛于 0

对第二个方程有

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e$$

其零动态为

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = 0$$

总之，基于输入-输出线性化的控制设计有 3 个步骤：

微分输出  $y$  直到输入  $u$  出现，选择  $u$  使之消掉非线性项并保证跟踪收敛

研究内动态的稳定性

如果相应于输入-输出线性化的相对阶和系统阶数相同，则非线性系统可以完全线性化，且使用这个步骤可以得到满意的控制器。如果相对阶比系统阶数小，则非线性系统只能部分线性化，而且控制器能否实际上被运用依赖于内动态的稳定性。如果零动态是不稳定的，应该寻找不同的控制策略，使得变换后的系统部分线性化。

## 6.6 单输入-单输出系统的输入-输出线性化

本节讨论单输入非线性系统的输入-输出线性化，考虑系统状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{6.37}$$

具体有以下主题：

- 1、一个非线性系统如何产生一个线性的输入-输出关系？
- 2、输入-输出线性化相应的内动态和零动态是什么？
- 3、如何基于输入-输出线性化设计稳定的控制器？

### 6.6.1 产生一个线性输入-输出关系

输入-输出线性化的基本思想就是反复地对输出  $y$  求导，直到输出  $u$  出现，然后设计  $u$  来消掉非线性项。然而某些系统的相对阶没有定义，因此无法通过设计  $u$  来消掉非线性项。

#### (1) 相对阶有定义的情况

考查状态空间的一个开连通区域  $\Omega_x$ 。用微分几何的记号，要进行重复微分，及首先计算出

$$\dot{y} = \nabla h(f + gu) = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (6.38)$$

如果对  $\Omega_x$  中的某一点  $x = x_0$  上有  $L_g h(x) \neq 0$ ，则由连续性知，不等式在  $x_0$  的某个有限领域  $\Omega$  上成立。在  $\Omega$  中，取输入变换

$$u = \frac{1}{L_g h} (-L_f h + v)$$

(6.39)

得到  $y$  和  $v$  的一个线性关系，即  $\dot{y} = v$ 。

如果对  $\Omega_x$  中所有的点  $x$  都有  $L_g h(x) = 0$ ，对  $\dot{y}$  微分可得

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \quad (6.40)$$

如果对  $\Omega_x$  中所有的点  $x$  都有  $L_g L_f h(x) = 0$ ，则需多次微分，从而得到

$$y^{(i)} = L_f^i h(x) + L_g L_f^{i-1} h(x)u \quad (6.41)$$

直到存在某个正整数  $r$ ，使得

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (6.42)$$

在  $\Omega_x$  中的某一点  $x = x_0$  成立，则由连续性可知，不等式在  $x_0$  的某个有限领域  $\Omega$  上成立。在  $\Omega$  中，取输入变换

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v) \quad (6.43)$$

代入到

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u \quad (6.44)$$

得到简单的线性关系

$$y^{(r)} = v \quad (6.45)$$

定义 6.6.1 如果对  $\forall x \in \Omega$ ，有

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \quad 0 \leq i < r-1 \quad (6.46)$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (6.47)$$

则称单输入-单输出系统于  $\Omega$  上具有相对阶  $r$ 。

## (2) 相对阶无定义的情况

由于经常首先考查系统在某个特殊工作点  $x_0$  的性质，此时相对阶的定义值得注意。和以前一样，对  $y$  求导直到输入  $u$  出现，那么，如果在点  $x_0$  处  $u$  的系数满足  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ ，由连续性可知，在  $x_0$  的某个邻域中上式都成立，则称系统在点  $x_0$  处具有相对阶  $r$ 。

然而，可能出现的情况是：当输入  $u$  出现时，其系数满足  $L_g L_f^{r-1} h(x) = 0$ ，而在任意靠近  $x_0$  的某些点上不为零，这时称非线性系统的相对阶在  $x_0$  处没有定义。

### 例 6.18 考查系统

$$\ddot{x} = \rho(x, \dot{x}) + u$$

其中， $\rho$  是状态  $x = [x, \dot{x}]^T$  的非线性光滑函数。如果输出函数的定义为

$$y = x$$

显然系统具有标准形式，且相对阶为 2。

如果输出函数为

$$y = x^2$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 2x\dot{x} \\ \ddot{y} &= 2x\ddot{x} + 2\dot{x}^2 = 2x(\rho + u) + 2\dot{x}\end{aligned}$$

即有

$$L_g L_f h = 2x$$

则这时在  $x=0$  点处系统的相对阶既不是 1 也不是 2.

### 6.6.2 正则形式

当非线性系统的相对阶有定义，且  $r < n$  时，用  $y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}$  作为新的状态变量的一部分，就可以把系统变换成所谓的“正则形式”了。在  $x_0$  的一个邻域  $\Omega$  内，令

$$\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_r]^T = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(r-1)}]^T \quad (6.48)$$

则系统的正则形式可写为

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_r \\ \alpha(\mu, \psi) + b(\mu, \psi)u \end{bmatrix} \\ \dot{\psi} &= w(\mu, \psi) \\ y &= \mu_1\end{aligned} \quad (6.49)$$

$\mu_i$  和  $\psi_j$  称为  $\Omega$  上的正则坐标和正则状态。

为了证明非线性系统可以变换成正则形式，则要先证明这样的坐标变换不但存在而且是真正的坐标变换。换句话说，必须证明能够构造一个局部微分同胚

$$\phi(x) = [\mu_1 \ \dots \ \mu_r \ \psi_1 \ \dots \ \psi_{n-r}] \quad (6.50)$$

使得微分正则形式成立。

引理 6.6.1 如果在一个邻域  $\Omega$  内的相对阶为  $r$ ，则在  $\Omega$  上  $\nabla\mu_1, \nabla\mu_2, \dots, \nabla\mu_r$  是线性无关的。

证明:首先利用  $\mu$ ，方程 (6.71) 可写成

$$\nabla\mu_i g = 0 \quad \leq i < r \quad (6.51)$$

$$\nabla\mu_r g \neq 0 \quad (6.52)$$

先证  $r = 3$  时的情形（一般情况的证明类似可证明）。

假定在  $\Omega$  内存在处处光滑的函数  $\alpha_i(x)$  使得下式成立

$$\alpha_1 \nabla\mu_1 + \alpha_2 \nabla\mu_2 + \alpha_3 \nabla\mu_3 = 0 \quad (6.53)$$

将上式乘以  $g$  得到

$$[\alpha_1 \nabla\mu_1 + \alpha_2 \nabla\mu_2 + \alpha_3 \nabla\mu_3]g = 0 \quad (6.54)$$

可知在  $\Omega$  上  $\alpha_3(x)$  处为零

把  $\alpha_3(x) = 0$  代入得到

$$\alpha_1 \nabla\mu_1 + \alpha_2 \nabla\mu_2 = 0 \quad (6.55)$$

将上式乘以李括号  $ad_f g$  得到

$$0 = \alpha_1 L_{ad_f g} \mu_1 + \alpha_2 L_{ad_f g} \mu_2 = \alpha_1 [L_f L_g h - L_g L_f h] + \alpha_2 [L_f L_g - L_g L_f] L_f h = -\alpha_2 L_g L_f^2 h \quad (6.56)$$

这意味着在  $\Omega$  上  $\alpha_2(x)$  处处为零。

把  $\alpha_2(x) = 0$  代入得到

$$\alpha_1 \nabla\mu_1 = 0 \quad (6.57)$$

将上式乘以  $ad_f^2 g$  得到

$$0 = \alpha_1 L_{ad_f^2 g} \mu_1 = \alpha_1 [L_f^2 L_g h - 2L_f L_g L_f h + L_g L_f^2 h] = \alpha_1 L_g L_f^2 h$$

(6.58)

现在证明存在另外的  $n-r$  个函数  $\psi_j (j=1, \dots, n-r)$ , 可以组成坐标变换。

证明: 只需证明存在梯度向量  $\nabla\psi_j$ , 使得在点  $x_0$  处  $\nabla\mu_i$  和  $\nabla\psi_j$  都是线性无关, 方程 (6.58) 表明前  $r-1$  个刚才已经正线性无关的向量  $\nabla\mu_i (i=1, \dots, r-1)$  都在与  $g$  正交的超平面内见图 6.6, 而这个超平面是  $r-1$  维的, 因此在超平面内可以找到

$$n-r = (n-1) - (r-1) \quad (6.59)$$

个与  $\nabla\mu_i$  线性无关的向量, 将这些向量定义为

$$\nabla\psi_j (j=1, \dots, n-r)。$$

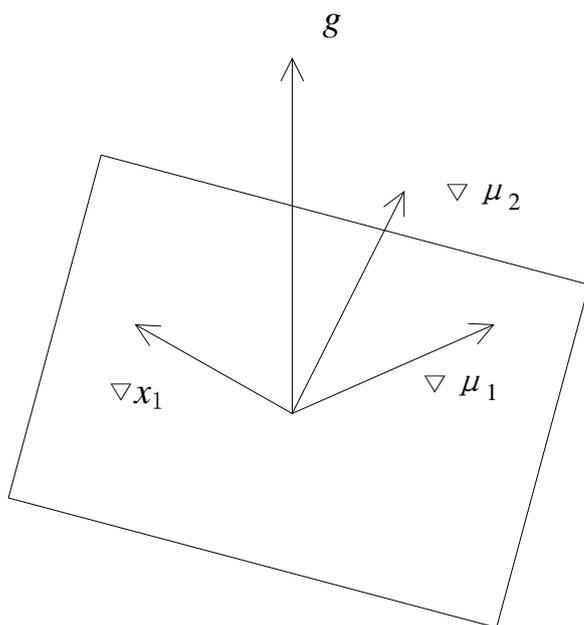


图 6.6 超平面

由定义知, 满足

$$\nabla\psi_j g = 0 \quad 1 \leq j \leq n-r \quad (6.60)$$

由连续性可知，在  $x_0$  的某个邻域  $\Omega_1$  内雅克比矩阵是可逆的。重新将  $\Omega_1$  与原来的  $\Omega$  的交定义为新的  $\Omega$ 。则变换  $\phi$  是  $\Omega$  内的一个微分同胚。因而该变换在  $\Omega$  内是一个真正的坐标变换，它使得非线性系统具有正则形式，并且有

$$\begin{aligned} a(\mu, \psi) &= L_f^r h(x) = L_f^r h[\phi^{-1}(\mu, \psi)] \\ b(\mu, \psi) &= L_g L_f^{r-1} h(x) = L_g L_f^{r-1} h[\phi^{-1}(\mu, \psi)] \end{aligned} \quad (6.61)$$

$\mu$  不会在上式出现，因为  $L_g \psi_j(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

### 例 6.19 考查非线性系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1x_2 + \sin x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^2x_2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = h(x) = x_3$$

解 由于

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2x_2 \\ \ddot{y} &= 2\dot{x}_2 = 2(2x_1x_2 + \sin x_2) + u \end{aligned}$$

所以系统的相对阶为 2，并且有

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= 2x_2 & L_g h(x) &= 0 \\ L_g L_f h(x) &= 1 \end{aligned}$$

为了得到正则形式，取

$$\begin{aligned} \mu_1 &= h(x) = x_3 \\ \mu_2 &= L_f h(x) = 2x_2 \end{aligned}$$

使得构成坐标变换所需的第三个函数  $\psi(x)$  必须满足

$$L_g \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} e^{2x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0$$

该方程的一个解是

$$\psi(x) = 1 + x_1 - e^{2x_2}$$

现在考虑状态变换  $z = [\mu_1, \mu_2, \psi]^T$ ，它的雅可比矩阵

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2e^{2x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

非奇异，其逆变换为

$$x_1 = -1 + \psi + e^{\mu_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \mu_2$$

$$x_3 = \mu_1$$

因此这个状态变换是全局的。应用上述新坐标，该系统可变成如下正则形式

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \mu_2 \\ \dot{\mu}_2 &= 2(-1 + \psi + e^{\mu_2})\mu_2 + 2\sin(\mu_2/2) + \mu \\ \dot{\psi} &= (1 - \psi - e^{\mu_2})(1 + 2\mu_2 e^{\mu_2}) - 2\sin(\mu_2/2)e^{\mu_2} \\ u(x) &= -\frac{L_f^2 h(x)}{L_g L_f h(x)} + v = \frac{4x_1 x_2 + 2\sin x_2}{1} + v \end{aligned}$$

### 6.6.3 输入-输出零动态

利用输入-输出线性化，非线性系统可分为内（不能观）和外（输入-输出）两部分。由于外部的  $y$  和  $v$  是线性的关系，所以可以很容易地设计输入  $v$  使得输出  $y$  具有期望的形态。现在的问

题就内动态是否将具有良好的形态，即内动态是否保持有界。由于控制设计必须考查整个系统（因此不能允许内动态的不稳定性），所以必须小心处理内动态的形态。

与输入-输出线性化对应的内动态仅和正则形式的方程组中的后  $n-r$  个方程  $\dot{\psi} = w(\mu, \psi)$  相关。一般来说，这个系统与输出状态  $\mu$  有关。现在详细研究系统的一个内在性质，通常选择输入使输出恒为零时系统的内动态就是所谓的零动态，研究零动态可以得到一些关于内动态稳定的结论。

输出  $y$  为  $0$  意味着它对时间的各阶导数均为零，于是系统相应的内动态即零动态描述的是系统在由  $\mu = 0$  定义的  $n-r$  维光滑面（流形） $M_0$  上的轨线。为了使系统在零动态流形上运行（即使状态  $x$  停留在曲面  $M_0$  上），系统的初始状态  $x(0)$  必须在  $M_0$  上，而且必须选择适当的  $u$  使得  $y$  恒为零，即  $y^{(r)}(t) = 0$ 。这意味着  $u$  必须满足

$$u_0(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (6.62)$$

相应于这个输入，并且假设系统的初始状态在  $M_0$  上，即  $\mu(0) = 0$ ，系统可以写成正则形式

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= 0 \\ \dot{\psi} &= w(0, \psi) \end{aligned} \quad (6.63)$$

由定义知，上式即为非线性系统的零动态。

**例 6.20** 上例的内动态方程为

$$\dot{\psi} = (1 - \psi - e^{\mu_2})(1 + 2\mu_2 e^{\mu_2}) - 2\sin(\mu_2 / 2)e^{\mu_2}$$

当  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$  时, 可以得到零动态

$$\dot{\psi} = -\psi$$

定义 非线性系统称为渐近最小相位的, 如果它的零动态是渐近稳定的。

## 6.7 非线性系统的零动态设计方法

由前所述, 一个系统的动态行为分为外部与内部动态两个部分。从应用的角度, 主要关心的是系统的外部状态, 要求外部动态不仅稳定而且有良好的性能, 而内部系统动态只要求稳定即可。从工程实际出发, 只要满足工程要求, 不将系统的状态方程全部线性化, 而只需线性化其中的一部分, 可使控制律简化, 这种方法称为零动态设计方法。

### (1) 非线性系统的零动态设计方法 1

考虑系统状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.64}$$

系统相对阶  $\gamma < n$ 。假设

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_r(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

系统转化为正则形式可写为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(\Phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z))u \\ \dot{z}_{r+1} &= L_f \phi_{r+1}(\Phi^{-1}(z)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f \phi_n(\Phi^{-1}(z)) \end{aligned} \quad (6.66)$$

式中  $L_f h(\Phi^{-1}(z))$  表示为  $L_f h(x)|_{\Phi^{-1}(z)}$ ，并且选择的函数  $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  满足下面条件：

$$L_g \phi_{r+1}(x) = L_g \phi_{r+2}(x) = \dots = L_g \phi_n(x) = 0 \quad (6.67)$$

且在平衡点雅可比矩阵

$$J_\varphi = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \quad (6.68)$$

是非奇异的。令

$$\zeta = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_r]^T, \eta = [z_{r+1} \ z_{r+2} \ \cdots \ z_n]^T$$

则系统的正则形式可写为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} z_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ z_r \\ a(\zeta, \eta) + b(\zeta, \eta)u \end{bmatrix} \\ \dot{\eta} &= q(\zeta, \eta) \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{6.69}$$

式中

$$\begin{aligned} a(\zeta, \eta) &= L_f^r h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(\zeta, \eta)} = L_f^r h(\Phi^{-1}(\zeta, \eta)) \\ b(\zeta, \eta) &= L_g L_f^{r-1} h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(\zeta, \eta)} = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(\zeta, \eta)) \\ q(\zeta, \eta) &= \begin{bmatrix} q_{r+1}(\zeta, \eta) \\ \vdots \\ q_n(\zeta, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f \varphi_{r+1}(\Phi^{-1}(\zeta, \eta)) \\ \vdots \\ L_f \varphi_n(\Phi^{-1}(\zeta, \eta)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果系统输出  $y = h(x(t))$  是系统实际输出（动态响应）相对于平衡点输出函数（参考输出）的动态偏差，可采用控制的手段使系统输出量的动态偏差在任何时刻都为零，即使得

$$y = h(x(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

从该控制系统的外部动态看来，系统是具有高稳定度，以至于在任何干扰作用下，其输出都保持不变。

由于  $y = z_1(t)$  已经被设置在任何时刻都等于零，从而可得到

$$z_2(t) = \frac{dz_1(t)}{dt} = 0, \quad z_3(t) = \frac{dz_2(t)}{dt} = 0, \quad t \geq 0$$

以此类推， $z$  坐标系中前面的  $r$  个坐标对于所有的  $t \geq 0$  有

$$\zeta(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \cdots \ z_r(t)]^T = 0$$

并且有

$$\dot{z}_r(t) = 0$$

在这样的条件下，从而有

$$a(\zeta, \eta) + b(\zeta, \eta)u = 0 \Rightarrow u = -\frac{a(z)}{b(z)} \Big|_{z=\Phi(x)} = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (6.70)$$

从而只剩下动态方程  $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ ，即有

$$\begin{array}{ccc} \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_n) & & \dot{z}_{r+1} = L_f \varphi_{r+1}(\Phi^{-1}(0, \eta)) \\ \vdots & \Rightarrow & \vdots \\ \dot{z}_n = q_n(0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_n) & & \dot{z}_n = L_f \varphi_n(\Phi^{-1}(0, \eta)) \end{array}$$

上述方程称为系统的零动态方程组。所以只要零动态在所求出的控制律作用下，整个系统必然是稳定的，且输出量  $y(t)$  在任何干扰下都保持不变

例 6.21 设给定系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y(t) = h(x) = x_1$$

试对该系统进行零动态设计。

解 (1) 求系统的相对阶和坐标变换。先进行如下计算：

$$L_g h(x) = (1 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad L_f h(x) = x_3 - x_2^3$$

$$L_g L_f h(x) = (0 \ -3x_2^2 \ 1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3x_2^2 + 1$$

由此可知系统的相对阶  $\gamma = 2$

则前  $\gamma$  个坐标变换为

$$z_1 = \varphi_1(x) = h(x) = x_1$$
$$z_2 = \varphi_2(x) = L_f h(x) = x_3 - x_2^3$$

选择第三个坐标变换为

$$z_3 = \varphi_3(x)$$

$\varphi_3(x)$  应该满足方程

$$L_g \varphi_3(x) = 0$$

即有

$$\left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} = 0$$

其解为

$$\varphi_3(x) = x_2 + x_3$$

则系统的坐标变换为

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = x_3 - x_2^3$$

$$z_3 = x_2 + x_3$$

(2) 求系统的零动态

$$L_f \varphi_3(x) = (0 \quad 1 \quad 1) \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 - (x_2 + x_3)$$

把  $x$  坐标系换位  $z$  坐标系得到

$$L_f \varphi_3(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}} = x_1^2 - (x_2 + x_3) = z_1^2 - z_3$$

系统零动态为

$$\dot{z}_3 = L_f \varphi_3(\Phi^{-1}(0, \eta)) = -z_3$$

即零动态方程为

$$\dot{z}_3 = -z_3$$

零动态方程是渐近稳定的，故整个系统是渐近稳定的。

(3) 求控制律。先求出

$$L_f^2 h(x) = L_f^2 h(x) = \frac{\partial(x_3 - x_2^3)}{\partial x} \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix} = 3x_2^2 + x_1^2 - x_3$$

已经求出了

$$L_g L_f h(x) = 3x_2^2 + 1$$

故可得到控制律  $u$  为

$$u = -\frac{3x_2^3 + x_1^2 - x_3}{3x_2^2 + 1}$$

## (2) 非线性系统的零动态设计方法 2

为求出坐标变换  $z_{r+1} = \varphi_{r+1}(x), \dots, z_n = \varphi_n(x)$  可以有两种方法。一种是通过解偏微分方程组  $L_g \varphi_i(x) = 0, \quad \gamma + 1 \leq i \leq n$ ; 另外的方法就是根据  $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$  为非奇异这个条件来选择  $\varphi_{r+1}(x), \dots, \varphi_n(x)$

线性化的形式变成

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= a(z) + b(z)u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u \end{aligned}$$

再进一步写成

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r-1} &= z_r \\
\dot{z}_r &= L_f^r h(\Phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z))u \\
\dot{\eta} &= q(\zeta, \eta) + p(\zeta, \eta)u
\end{aligned}$$

此处有

$$q(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} q_{r+1}(z) \\ \vdots \\ q_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f \varphi_{r+1}(\Phi^{-1}(z)) \\ \vdots \\ L_f \varphi_n(\Phi^{-1}(z)) \end{bmatrix}$$

$$p(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} p_{r+1}(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_g \varphi_{r+1}(\Phi^{-1}(z)) \\ \vdots \\ L_g \varphi_n(\Phi^{-1}(z)) \end{bmatrix}$$

为了求出系统的零动态及使得输出满足

$$y(t) = h(x(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

的控制律, 令  $\zeta(t) = 0$  从而有  $\dot{z}_r = 0$ , 可以求出状态反馈为:

$$u = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

求出系统的零动态方程为:

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) - p(0, \eta) \frac{-L_f^r h(\Phi^{-1}(0, \eta))}{L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(0, \eta))}$$

以上为零动态设计方法 2 得到的系统状态反馈方程与零动态方程。只需对零动态方程的稳定性加以检验即可。

**例 6.22** 求下面系统的零动态方程及相应的状态反馈

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1(x_2 - x_1^2) \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2(1+x_3) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = h(x) = x_4$$

解 (1) 求系统的相对阶和坐标变换, 计算

$$L_g h(x) = L_g x_4 = 0$$

$$L_f x_4 = x_1^2 + x_2, L_g L_f x_4 = 2(1+x_3)$$

可知系统的相对阶  $r = 2$ , 求出前两个坐标变换为

$$z_1 = \varphi_1(x) = h(x) = x_4$$

$$z_2 = \varphi_2(x) = L_f h(x) = x_1^2 + x_2$$

可以选择后面两个坐标变换

$$z_3 = \varphi_3(x) = x_3$$

$$z_4 = \varphi_4(x) = x_1$$

使得矩阵

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是非奇异的。

(2) 求在新坐标系下的方程, 变换  $z = \Phi(x)$  的逆变换  $x = \Phi^{-1}(z)$

即有:

$$x_1 = z_4$$

$$x_2 = z_2 - z_4^2$$

$$x_3 = z_3$$

$$x_4 = z_1$$

在以新坐标系下的系统写为

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = L_f^2 h(\Phi^{-1}(z)) + L_g L_f(\Phi^{-1}(z))u$$

$$\dot{z}_3 = L_f \varphi_3(\Phi^{-1}(z)) + L_g \varphi_3(\Phi^{-1}(z))u$$

$$\dot{z}_4 = L_f \varphi_4(\Phi^{-1}(z)) + L_g \varphi_4(\Phi^{-1}(z))u$$

计算上式中的各项李导数如下：

$$L_f^2 h(x) = L_f(x_1^2 + x_2) = 2x_1^2(x_2 - x_1^2) + x_1$$

$$L_f^2 h(\Phi^{-1}(z)) = 2z_4^2(z_2 - 2z_1^2) + z_1$$

$$L_f \varphi_3(x) = L_f x_3 = -x_3$$

$$L_f \varphi_3(\Phi^{-1}(z)) = -z_3$$

$$L_g \varphi_3(x) = L_g x_3 = 1$$

$$L_g \varphi_3(\Phi^{-1}(z)) = 1$$

$$+L_g L_f(\Phi^{-1}(z))u$$

$$L_f \varphi_4(x) = L_f x_1 = x_1(x_2 - x_1^2)$$

$$L_f \varphi_4(\Phi^{-1}(z)) = z_1 z_4 - 2z_4^3$$

$$L_g \varphi_4(x) = L_g x_1 = 0$$

$$L_g \varphi_4(\Phi^{-1}(z)) = 0$$

从而在新坐标系下的方程

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = 2z_4^2(z_2 - 2z_4^2) + z_4 + 2(1 + z_3)u$$

$$\dot{z}_3 = -z_3 + u$$

$$\dot{z}_4 = z_2 z_4 - 2z_4^3$$

(3) 求系统的零动态方程及相应的状态反馈。

在上述方程中令  $z_1 = z_2 = 0, \dot{z}_2 = 0$

可得到  $u = -\frac{2z_4^2(z_2 - 2z_4^2) + z_4}{2(1 + z_3)}$

由此可得  $u(0, \eta) = -\frac{-4z_4^4 + z_4}{2(1 + z_3)}$

最后零动态方程为

$$\dot{z}_3 = -z_3 - \frac{-4z_4^4 + z_4}{2(1 + z_3)}$$

$$\dot{z}_4 = -2z_4^3$$

轨线方程是稳定的。

## 6.8 多输入-多输出系统的输入-输出线性化及应用例子

对于多输入-多输出，如果考虑如下形式的方系统，即输入与输出个数相同的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.72}$$

其中， $x$  为  $n \times 1$  的状态向量， $u$  是  $m \times 1$  的控制输入向量， $y$  是  $m \times 1$  输出向量， $f$  是光滑向量场， $h$  是光滑向量函数， $G$  是  $n \times m$  矩阵。

### 6.8.1 多输入-多输出系统的反馈线性化

多输入-多输出系统的输入-输出线性化类似单输入-单输出类似，即对输出  $y_i$  微分直到输入出现。假设  $r_i$  是使得至少有一个输入出现在  $y_i^{(r_i)}$  中的最小整数，则有

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i + \sum_{j=1}^m L_{g_i} L_f^{r_i-1} h_i u_j \quad (6.73)$$

其中，在  $x_0$  的一个邻域  $\Omega_i$  内至少存在一个  $j$ ，使得  $L_{g_i} L_f^{r_i-1} h_i(x) \neq 0$ 。把上述步骤用于每个输出  $y_i$ ，可得

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \dots \\ \dots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \dots \\ \dots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} + E(x)u \quad (6.74)$$

其中， $m \times m$  阶矩阵  $E(x)$  的定义是很明显的。

定义  $\Omega$  为  $\Omega_i$  的交集。假设部分相对阶  $r_i$  已经定义好了，则  $\Omega$  是  $x_0$  的一个一个有限邻域。而且，如果  $E(x)$  在  $\Omega$  上可逆，则类似于单输入-单输出系统，取输入变换

$$u = E^{-1} \begin{bmatrix} v_1 - L_f^{r_1} h_1(x) \\ \dots \\ \dots \\ v_m - L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

得到  $m$  个简单的方程

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \dots \\ \dots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

由于输入  $v_i$  仅作用于输出  $y_i$  上，所以控制律为解耦控制律。标量  $r = r_1 + \dots + r_m$  被称为系统在点  $x_0$  的总相对阶。

通过把输入限制为  $\mathbf{0}$ ，可类似于单输入-单输出系统来定义多

输入-多输出系统的零动态。

### 6.8.2 基本多输入-多输出线性化的推广

只有在区域  $\Omega$  上解耦矩阵  $E$  可逆的情形下, 才能得到上述输入-输出线性化。考虑到构造  $E$  的直接步骤, 这个条件限制太强。下面, 讨论当可逆条件不成立时, 即当  $E$  是奇异矩阵时, 产生输入-输出线性化的两种方法, 它们都有迭代的性质。系统在有限步后收敛的正式条件已经推导出来 ([Isidori,1989])。第一种方法: 选取一些原系统输入的导数作为新输入, 使得相应的矩阵  $E$  是可逆的, 基于新输入进行系统的控制设计, 系统的实际上的输入可通过积分得到。第二种方法是过系统的多输入-多输出形式, 包括导出使矩阵  $E$  可逆的新输入。在这两种情形中最基本的做法都是使内动态稳定。

### 6.8.3 再定义输入: 动态扩张

为简化起见, 先考查一个具有两个输入和两个输出的系统, 假设  $E(x)$  的秩为 1。不失一般性, 这意味着可以重新定义输入向量使得  $E(x)$  只有一个非零列,  $e_1 = e_1(x)$  使得方程的表达式只含有  $u_1$

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \end{bmatrix} + e_1 u_1 \quad (6.77)$$

微分上式并把系统方程代入得到

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1+1)} \\ y_2^{(r_2+1)} \end{bmatrix} = b(x, u_1) + E_1(x, u_1) \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

如果  $E_1(x, u_1)$  是可逆的, 则上述方程具有标准形式, 其中  $\dot{u}_1, u_2$  看着是控制输入,  $u_1$  看成是额外的状态, 可直接用输入-输出线性化设计这些输入, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = E_1^{-1}[v - b(x, u_1)] \quad (6.79)$$

其中  $v$  是选择来配置所得到的线性输入-输出系统的极点。不过系统输入  $u_1$  必须由上式积分得到, 因此, 真正的控制律包含一个提供“动态”控制器的积分器。如果  $E_1(x, u_1)$  还是奇异的, 重复上述步骤, 加入更多积分器。

#### 6.8.4 再定义输出: 系统反演

对动态扩张的例子再定义输入, 现在先对不等式左边进行微分, 而考虑变量

$$z = e_{12}(x)y_1^{(r_1)} - e_{11}(x)y_1^{r_2} \quad (6.80)$$

其中,  $e_1 = [e_{12} \ e_{11}]^T$ 。

$$z = e_{12}(x)L_f^{r_1}h_1(x) - e_{11}(x)L_f^{r_2}h_2(x) \quad (6.81)$$

微分上式可得到

$$\dot{z} = \gamma_0(x) + \gamma_1(x)u_1 + \gamma_2(x)u_2 \quad (6.82)$$

如果矩阵

$$E_2(x) = \begin{bmatrix} e_{11}(x) & 0 \\ \gamma_1(x) & \gamma_2(x) \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

是可逆的, 把  $y_1(x)$  和  $z$  看成输出,  $u_1$  和  $u_2$  看成输入, 用以下的控制律可得到输入—输出线性化。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = E_2^{-1}(x) \begin{bmatrix} v_1 - L_f^r h_1 \\ v_2 - \gamma_0(x) \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

从而得到

$$\begin{bmatrix} y^{(r_1)} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

容易通过设计新输入  $v_1$  和  $v_2$ ，来调整  $y$  和  $z$ 。如果矩阵  $E_2(x)$  是奇异的，重复上述步骤得到新输出。

## 6.9 相对阶与无源性

定理 6.9.1 对于仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (6.86)$$

$\frac{\partial h(x)}{\partial x}$  满秩，则能够进行无源化且具有正定存储函数  $H(x)$  的充分必要条件是系统相对阶为  $\{1, 1, \dots, 1\}$  且是弱最小相位的。

证明必要性。若系统 (6.86) 无源，则系统具有 KYP 特性，则有  $L_g H(x) = h^T(x)$ ，于是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} g(x) \right) g(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = L_g h(x) \quad (6.87)$$

由于  $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$  满秩，则  $L_g h(x) \neq 0$ ，则根据第 1 章相对阶的定义，系统的相对阶为  $\{1, 1, \dots, 1\}$ 。

若系统是零动态稳定的，系统就为弱最小相位。下面考察无源系统的零动态稳定性。系统 (6.86) 的零动态满足

$$L_g H(x) = h^T(x) = 0 \quad (6.88)$$

由于系统是无源的，则有

$$\dot{H} \leq u^T Y = u^T h(x) = 0 \quad (6.89)$$

于是

$$\dot{H} = L_f H + L_g H u = L_f H \leq 0 \quad (6.90)$$

式(6.90)表明系统在集合  $\{x/h(x)=0\}$  是零动态稳定的，故系统是弱最小相位的。

充分性。由于仿射非线性系统的相对阶为  $\{1, 1, \dots, 1\}$ ，则存在坐标变换

$$(z, y) = (\varphi(x), h(x))$$

使系统变为如下形式

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, y) + q(z, y)u \\ \dot{y} = h(z, y) + k(z, y)u \end{cases} \quad (6.91)$$

式中， $f(z, y) = L_f z, q(z, y) = L_g z, h(z, y) = L_f y, k(z, y) = L_g y$ 。

由于  $k(z, y)$  为非奇异的，则系统(6.91)可进一步通过反馈

$$u = k^{-1}(z, y)[-h(z, y) + v] \quad (6.92)$$

变为

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(z, y) + \bar{q}(z, y)v \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (6.93)$$

式中， $\bar{f}(z, y) = f(z, y) - q(z, y)k^{-1}(z, y)h(z, y), \bar{q}(z, y) = q(z, y)k^{-1}(z, y)$ 。

由于  $\bar{q}(z, y)$  是光滑的向量场，则有

$$\bar{q}(z, y) = \bar{q}(z, 0) + \int_0^1 \frac{\partial \bar{q}(z, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=sy} y ds \quad (6.94)$$

式(6.94)的证明: 设  $y=0$  时, 系统  $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = v \end{cases}$  的子系统在  $x=0$

是渐进稳定的, 即  $x=0$  是系统  $\dot{x} = f^*(x) = f^*(x, 0)$  渐进稳定的平衡点。

令  $f_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f(z, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=xy} ds$ , 则有

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial f(z, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=xy} ds = \frac{1}{y} \int_0^y \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{y} (f(x, y) - f(x, 0)) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = f(x, 0) + f_1(x, y)y \text{ 证毕}$$

进一步作变换

$$z = \eta - \bar{q}(z, 0)y$$

则系统 (6.93) 变换为

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \tilde{f}(\eta, y) + \left( \sum_{i=1}^m q_i(\eta, y) y_i \right) v \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (6.95)$$

由于  $\tilde{f}(\eta, y)$  是光滑的, 从而有

$$\tilde{f}(\eta, y) = \tilde{f}(\eta, 0) + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}(\eta, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=xy} y ds$$

(6.96)

系统 (6.95) 改写为

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_{zd}(\eta) + \tilde{f}(\eta, y)y + \left( \sum_{i=1}^m q_i(\eta, y) y_i \right) v \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (6.97)$$

式中  $f_{zd}(\eta) = \tilde{f}(\eta, 0)$ ,  $\bar{q}(\eta, y) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{q}(\eta, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=xy} ds$

设半正定函数  $W(\eta) \in C^1$  是系统 (6.97) 的零动态子系统的 Lyapunov 函数, 即有  $L_{f_{zd}} W \leq 0$ 。

取  $H(\eta, y) = W(\eta) + \frac{1}{2} y^T y$ , 则  $H(\eta, y)$  沿系统 (6.97) 的导数有

$$\begin{aligned} \dot{H}(\eta, y) &= L_{f_{zd}} W + L_{\bar{f}} W y + \left( \sum_{i=1}^m L_{z_i} W y_i \right) + y^T v \\ &= L_{f_{zd}} W + L_{\bar{f}} W y + y^T (I + M(z, y)) v \end{aligned} \quad (6.98)$$

式中,  $M(z, y) = \begin{bmatrix} L_{z_1} & L_{z_2} & \cdots & L_{z_n} \end{bmatrix}^T$ 。

根据式 (6.22) 取反馈控制律

$$v = [I + M(z, y)]^{-1} \left[ - (L_{\bar{f}} W)^T + w \right] \quad (6.99)$$

于是可得

$$\dot{H}(\eta, y) = L_{f_{zd}} W + y^T w \quad (6.100)$$

从而系统从新的输入  $w$  到输出  $y$  关于存储函数  $H(\eta, y)$  是无源的。

## 6.10 反馈线性化在光伏系统分析中应用

**光伏系统介绍** 光伏系统由 PV 阵列、直流母线电容器、三项电压型逆变器及滤波器组成。电压型逆变器负责任何外部环境条件最大功率点跟踪和功率控制。

### (1) PV 阵列模型

PV 阵列是由根据 PV 模组定额决定的并联或串联连接的 PV 电池组成。单个模组定额限定在几百瓦。当需要大功率时, PV 模组以串联或并联的形式连接获得 PV 阵列。PV 阵列的模型有单个 PV 电池可得。PV 电池的模型为

$$I = I_{LG} - I_{os} \{ \exp[\alpha(V + IR_s)] - 1 \} - \frac{V + IR_s}{R_{sh}} \quad (6.101)$$

式中,

$$I_{os} = I_{OR} \left( \frac{T}{T_r} \right)^3 \exp \left[ \beta \left( \frac{1}{T_r} - \frac{1}{T} \right) \right], \quad I_{LC} = [I_{SCR} + K_1(T - 25)] \frac{\lambda}{1000}$$

$$\alpha = \frac{q}{AkT}, \quad \beta = \frac{qE_{G0}}{Ak}$$

$I_{OS}$  为电池反向饱和电流;  $T$  为以  $K$  表示的电池温度;  $k$  为 Boltzmann 常数;  $q$  为电荷;  $K_1 = 0.0017 A/^{\circ}C$  为在  $I_{SCR}$  下的短路电流温度系数;  $I_{SCR}$  为  $25^{\circ}C$  和  $1kW/m^2$  时的短路电流;  $\lambda$  为太阳照度 ( $W/m^2$ );  $I_{LC}$  为光生电流;  $E_{G0} = 1.1eV$  为硅的禁带;  $A = 1.92$  为一致性因数;  $T_r = 301.18K$  为参考温度;  $I_{OR}$  为在  $T_r$  下的电池饱和电流;  $R_{sh}$  为电池分路电阻;  $R_s$  为电池串联电阻;  $I, V$  为电池输出电流和电压。

把上式推广到  $N_p$  模组并联和每个模组里  $N_s$  电池串联组成的 PV 阵列发出的电流为

$$I_{PV} = N_p I_{LG} - N_p I_{os} \{ \exp[\alpha(\frac{V}{N_s} + \frac{IR_s}{N_p})] - 1 \} - N_p \frac{(V/N_s + IR_s/N_p)}{R_{sh}}$$

## (2) 最大功率跟踪

光伏的 P-V 特性呈现最大功率跟踪点, 最大功率跟踪点几乎是大气条件 (如温度和辐射) 的函数。最大功率跟踪点对应电压  $U_{mpp}$  和电流  $I_{mpp}$ 。由于市场中的 PV 模组功率是低的, 必须确保 PV 模组工作在最大功率点, 在跟踪 PV 模组最大功率点之前, 首先应找到最大功率点。由于 PV 模组的 P-V 特性是非线性的,

对这样的函数确定最大功率点难度很大。然而，可以用数字技术计算最大功率点。值得注意的是在给定连续函数的最大值处导数为 0。于是，为确定最大功率点，须解如下方程：

$$\frac{dP}{dV} = \frac{I}{V} + \frac{dI}{dV} = 0 \quad (6.102)$$

### (3) 主电路

主电路如下图 6.7 所示，由直流侧具有 DC 电容器（用于稳定直流电压）的光伏阵、交流三臂二电平 PWM 逆变器、在每一相和电网间具有内部电阻的无源滤波器 L（可以消弱开关频率引起的逆变器输出电流高频分量组成）。受控的三相 PWM 逆变器任务是最大功率点跟踪和位移因数校正。

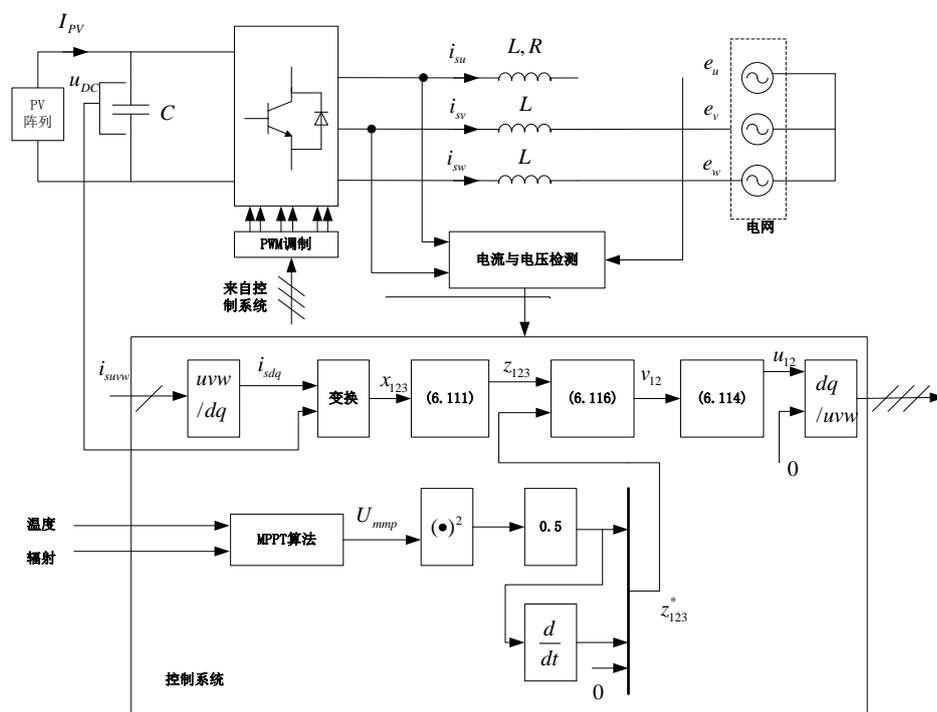


图 6.7 主电路及其控制系统

## 2. 反馈线性化控制器设计

### 1) PV 系统的数学模型

为推出在一个开关周期逆变器的动态模型，假设系统是平衡的，没有中性点连接。另外，忽略变换器的内部损失。同时，也假设逆变器的开关频率足够高以至于系统的参数在一个开关期内不变。则在  $uv\omega$  坐标系下的逆变器模型为：

$$\begin{cases} L \frac{di_{su}}{dt} = (S_u - \sum_{k=u,v,\omega} \frac{S_k}{3}) u_{DC} - Ri_{su} - e_u \\ L \frac{di_{sv}}{dt} = (S_v - \sum_{k=u,v,\omega} \frac{S_k}{3}) u_{DC} - Ri_{sv} - e_v \\ L \frac{di_{s\omega}}{dt} = (S_\omega - \sum_{k=u,v,\omega} \frac{S_k}{3}) u_{DC} - Ri_{s\omega} - e_\omega \\ L \frac{du_{DC}}{dt} = I_{PV} - S_u i_{su} - S_v i_{sv} - S_\omega i_{s\omega} \end{cases} \quad (6.103)$$

式中， $S_u, S_v, S_\omega$  分别为 PWM 逆变器的开关函数； $i_{su}, i_{sv}, i_{s\omega}$  分别为网侧电流； $u_{DC}$  为直流电压； $L, R$  分别为逆变器输出滤波器电感和电阻； $C$  为直流侧电容器； $i_{PV}$  为 PV 阵列发出的电流。

定义新的开关函数

$$d_k = S_k - \sum_{k=u,v,\omega} \frac{S_k}{3} \quad (6.104)$$

则在  $uv\omega$  坐标系下的逆变器新模型为：

$$\begin{cases} L \frac{di_{su}}{dt} = d_u u_{DC} - Ri_{su} - e_u \\ L \frac{di_{sv}}{dt} = d_v u_{DC} - Ri_{sv} - e_v \\ L \frac{di_{s\omega}}{dt} = d_\omega u_{DC} - Ri_{s\omega} - e_\omega \end{cases} \quad (6.105)$$

在两相同步旋转  $dq$  坐标系下的等效状态模型为

$$\begin{cases} L \frac{di_{sd}}{dt} = -Ri_{sd} + \omega i_{sq} + d_d u_{DC} - e_d \\ L \frac{di_{sq}}{dt} = -\omega i_{sd} - Ri_{sq} + d_q u_{DC} - e_q \end{cases} \quad (6.106)$$

由于控制目标是获得单位功率因数，可以假定网侧电压  $q$  轴分量为  $0$ 。则由 PV 交付给电网的有功功率为

$$p = \frac{3}{2} e_d i_{sd} \quad (6.107)$$

于是，可得

$$C \frac{du_{DC}}{dt} = i_{PV} - \frac{3}{2} \frac{e_d i_{sd}}{u_{DC}} \quad (6.108)$$

转化为多输入-多输出仿射非线性的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (6.109)$$

式中，

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ u_{DC}^2 / 2 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} -\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 - \theta_4 \\ -\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2 - \theta_5 \\ -\theta_6 x_1 + \theta_7 \sqrt{x_3} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_3 & 0 \\ 0 & \theta_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_d u_{DC} \\ d_q u_{DC} \end{bmatrix}, y = h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1 = \frac{R}{L}, \quad \theta_2 = \omega, \quad \theta_3 = \frac{1}{L}, \quad \theta_4 = \frac{e_d}{L}, \quad \theta_5 = \frac{e_q}{L}$$

$$\theta_6 = \frac{3 e_d}{2 C}, \quad \theta_7 = \frac{i_{PV}}{C}$$

## 2) 反馈线性化控制器设计

通过求多输入-多输出系统的相对阶  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 2 + 1 = 3 = n$ ,

且矩阵

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f h_1(x) & L_{g_2} L_f h_1(x) \\ L_{g_1} h_2(x) & L_{g_2} h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_6 \theta_3 & 0 \\ 0 & \theta_3 \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

非奇异, 则系统满足反馈线性化条件, 可以进行反馈线性化控制器设计。

计算同胚变换为

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -\theta_6 x_1 + \theta_7 \sqrt{x_3} \\ x_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-z_2 + \theta_7 \sqrt{z_1}) / \theta_6 \\ z_3 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

假设系统参数已知且是恒定的, 在新坐标系下的 PV 系统动态模型为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\theta_6 x_1 + \theta_7 \sqrt{x_3} \\ \dot{z}_2 = \theta_6 \theta_1 x_1 - \theta_6 \theta_2 x_2 - \theta_6 \theta_3 u_1 + \theta_6 \theta_4 + \frac{\theta_7^2}{2} - \theta_6 \theta_7 x_1 / (2\sqrt{x_3}) \\ \dot{z}_3 = -\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2 + \theta_3 u_2 - \theta_5 \end{cases} \quad (6.112)$$

代入  $z$  坐标系得到等效方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \theta_1 (\theta_7 \sqrt{z_1} - z_2) - \theta_6 \theta_2 z_3 - \theta_6 \theta_3 u_1 + \theta_6 \theta_4 + \frac{\theta_7^2}{2} - \frac{\theta_7 z_2}{2\sqrt{z_1}} \\ \dot{z}_3 = -\theta_1 z_3 - \theta_5 - \frac{\theta_2}{\theta_6} (\theta_7 \sqrt{z_1} - z_2) + \theta_3 u_2 \end{cases} \quad (6.113)$$

状态反馈线性化控制律为

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\theta_6 \theta_3} \left( -v_1 + \theta_6 \theta_1 x_1 - \theta_6 \theta_2 x_2 + \theta_6 \theta_4 + \frac{\theta_7^2}{2} - \frac{\theta_6 \theta_7 x_1}{2\sqrt{x_3}} \right) \\ u_2 = \frac{1}{\theta_3} (v_2 + \theta_2 x_1 + \theta_1 x_2 + \theta_5) \end{cases} \quad (6.114)$$

最终 PV 系统新的线性化系统模型为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v_1 \\ \dot{z}_3 = v_2 \end{cases} \quad (6.115)$$

由于系统是最小相位的，状态稳定控制律为

$$\begin{cases} v_1 = -k_1 z_1 - k_2 z_2 \\ v_2 = -k_3 z_3 \end{cases} \quad (6.116)$$

为实现轨迹跟踪，讲上述线性化控制律取为跟踪误差函数的形式

$$\begin{cases} v_1 = -k_1(z_1 - z_1^*) - k_2(z_2 - z_2^*) \\ v_2 = -k_3(z_3 - z_3^*) \end{cases} \quad (6.117)$$

## 习题

### 6.1 下面系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \end{cases}$$

是否能状态线性化？输入-状态稳定？求出稳定的控制率？并且仿真稳定的仿真图。

### 6.2 把下面系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

化为正则型，是否输入输出稳定？能否求出稳定的控制率？如能请仿真稳定的仿真图。

### 6.3 检验下述系统的能否进行输入-状态线性化

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_3 + \sin(x_1 - x_3) \\ x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

求出线性化的形式。

进一步说明下述变量

$$z_1 = x_1 - x_3, \quad z_2 = x_2 + x_2^2, \quad z_3 = x_3 + \sin(x_1 - x_3) + 2x_2 [x_3 + \sin(x_1 - x_3)]$$

能作为线性化状态吗？

**6.4** 核反应加热器模型的状态空间表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0 x_1 + a_1 \\ \dot{x}_2 = -b_0 x_2 - b_1 x_2^4 + b_2 x_3 + b_3 + b_4 \cdot u \\ \dot{x}_3 = c_0 x_1 + c_1 \cdot (x_2 - x_3) \\ y = x_1 \end{cases}$$

把系统反馈线性化，并求出使系统稳定的输入。

**6.5** 求下面系统的零动态方程及相应的状态反馈

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1(x_2 - x_1^2) \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2(1 + x_3) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = h(x) = x_2$$

并用仿真图验证

**6.6** 求下面系统的零动态方程及相应的状态反馈

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1(x_2 - x_1^2) \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2(1 + x_3) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

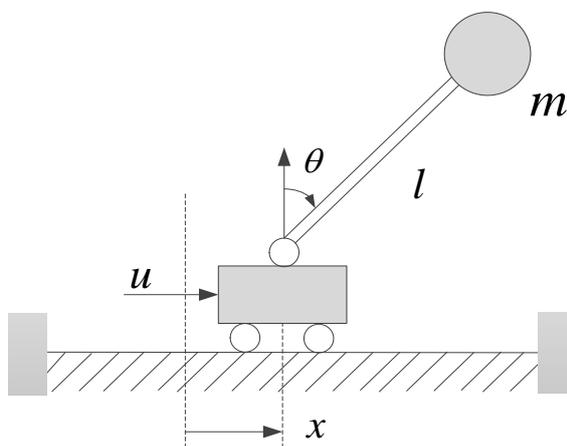
$$y(t) = h(x) = x_3$$

请给出仿真稳定的仿真图。

**6.7** 如下图中的倒立摆，这里假设小车的质量不能忽视，请建立

该系统的动力学模型，并且设计一个控制器，使得倒立摆沿水平轨道从垂直向下的位置，被控制到同一点处垂直向上的位置。（提示：可以首先将系统的动能用另外一个坐标系表示，使得旋转和平移之间解耦。）

你所设计的控制器能保证在  $x$  方向上有什么性质？当线性化后，是否退化到通常的线性倒立摆控制器？（各种情况用 Matlab 画出轨线走向图，并附程序）



小车-倒立摆